

ΘΕΩΡΙΑ ΣΩΜΑΤΩΝ  
Έαρινό Έξάμηνο 2016  
Καθηγητής Ν. Γ. Τζανάκης

Άσκησης της 1<sup>ης</sup> εβδομάδας

1. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις κάνετε τα εξής:

- Αποδείξτε ότι το  $q(X) \in \mathbb{Q}[X]$  είναι ανάγωγο.
- Θεωρήστε την επέκταση  $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$  και  $v \in \mathbb{C}$ , τέτοιο ώστε  $q(v) = 0$ , και υπολογίστε τον βαθμό και μία βάση της επέκτασης  $\mathbb{Q}[v]/\mathbb{Q}$ .
- Γράψτε τα στοιχεία  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  ως γραμμικούς συνδυασμούς -με ρητούς συντελεστές- των στοιχείων της βάσης του προηγούμενου έρωτήματος.

(α')  $q(X) = X^2 + X + 2, \quad \alpha = v^5, \quad \beta = 4/(v + 3).$

Απάντηση για τα  $\alpha, \beta$ :  $\alpha = -v - 6, \quad \beta = 1 - \frac{1}{2}v.$

(β')  $q(X) = X^3 - X^2 + X + 1, \quad \alpha = v^4, \quad \beta = v^5, \quad \gamma = v^6, \quad \delta = 1/(1 + v - v^2).$

Απάντηση για τα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ :  $\alpha = -1 - 2v, \quad \beta = -v - 2v^2, \quad \gamma = 2 + 2v - 3v^2, \quad \delta = 4 - 3v + 2v^2.$

(γ')  $q(X) = X^4 + 2X^2 - 2, \quad \alpha = v^6, \quad \beta = v^7, \quad \gamma = v^8, \quad \delta = 11/(1 + v + v^2 - v^3).$

Απάντηση για τα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ :  $\alpha = -4 + 6v^2, \quad \beta = -4v + 6v^3, \quad \gamma = 12 - 16v^2, \quad \delta = 5 - v + 2v^2.$

2. Έστω η επέκταση  $L/\mathbb{Q}$ , όπου  $L = \mathbb{Q}[v]$  με  $v^2 - 2 = 0$  και η επέκταση  $M/L$ , όπου  $M = L[w]$  με  $w^2 + 3 = 0$ . Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο  $q_1(X) = X^2 - 2$  είναι ανάγωγο πάνω απ' το  $\mathbb{Q}$  και το πολυώνυμο  $q_2(X) = X^2 + 3$  είναι ανάγωγο πάνω απ' το  $L$ . Υπολογίστε τους βαθμούς και βάσεις κάθε μιάς από τις επεκτάσεις  $L/\mathbb{Q}, M/L, M/\mathbb{Q}$ . Με τη βοήθεια του Online Magma Calculator (<http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/>) και των υποδειγμάτων χρήσης του, που είναι αναρτημένα στην ιστοσελίδα του μαθήματος, γράψτε τα στοιχεία  $(2v + 3w)/(v + 2w)$  και  $(1 + v + w)/(2 - v + 3w)$  ως γραμμικούς συνδυασμούς -με συντελεστές ρητούς- των στοιχείων της βάσης, που βρήκατε.

Απαντήσεις: Βάση της  $L/\mathbb{Q}$ :  $\{1, v\}, [L : \mathbb{Q}] = 2$ . Βάση της  $M/L$ :  $\{1, w\}, [M : L] = 2$ .

Βάση της  $M/\mathbb{Q}$ :  $\{1, v, w, vw\}, [M : \mathbb{Q}] = 4. \quad (2v + 3w)/(v + 2w) = \frac{11}{7} - \frac{1}{14}vw,$

$(1 + v + w)/(2 - v + 3w) = \frac{1}{1057}(305 + 69v - 65w - 136vw).$

3. Έστω  $v = \sqrt[3]{2}$  και  $w = i\sqrt{3}$ . Υπολογίστε το μονικό ανάγωγο πολυώνυμο  $q_1(X) \in \mathbb{Q}[X]$  για το οποίο  $q_1(v) = 0$  και θέσετε  $L = \mathbb{Q}[v]$ . Υπολογίστε το μονικό ανάγωγο πολυώνυμο  $q_2(X) \in L[X]$  για το οποίο  $q_2(w) = 0$  και θέσετε  $M = L[w]$ . Υπολογίστε τους βαθμούς και βάσεις κάθε μιάς από τις επεκτάσεις  $L/\mathbb{Q}, M/L, M/\mathbb{Q}$ . Με τη βοήθεια του Online Magma Calculator (<http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/>) και των υποδειγμάτων χρήσης του, που είναι αναρτημένα στην ιστοσελίδα του μαθήματος, γράψτε τα στοιχεία  $(2v + 3w)/(v + 2w)$  και  $(1 + v + v^2 + w)/(2 - v + 3w)$  ως γραμμικούς συνδυασμούς -με συντελεστές ρητούς- των στοιχείων της βάσης, που βρήκατε.

Απαντήσεις: Βάση της  $L/\mathbb{Q}$ :  $\{1, v, v^2\}, [L : \mathbb{Q}] = 3$ . Βάση της  $M/L$ :  $\{1, w\}, [M : L] = 2$ .

Βάση της  $M/\mathbb{Q}$ :  $\{1, v, v^2, w, vw, v^2w\}, [M : \mathbb{Q}] = 6$ .

$(2v + 3w)/(v + 2w) = \frac{1}{433}(650 - 3v + 18v^2) + \frac{1}{866}(12w - 72vw - v^2w),$

$(1 + v + v^2 + w)/(2 - v + 3w) = \frac{1}{1884}(26 + 46v + 335v^2 - 202w - 140vw - 139v^2w).$