Θεωρια Σωματων

Ἐξέταση Σεπτεμβρίου 2016

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

10 Σεπτεμβρίου 2016

1. Περιγρᾶψτε τὴν κατασκευὴ ἑνὸς σώματος F μὲ 9 (ἀκριβῶς) στοιχεῖα, καθὼς καὶ τὰ 9 στοιχεῖα τοῦ F. Ἐπιλέξτε ἕξι διαφορετικά $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in F \setminus \mathbb{Z}_3$ καὶ ὑπολογῖστε τὰ a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 συναρτήσει τῆς βάσεως τῆς ἐπέκτασης $F/\mathbb{Z}_3$. μον. 1

2. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ γωνία $\phi \in (0, \pi/2)$ μὲ $\cos\phi = 7/8$ δὲν μπορεῖ νὰ χωριστεῖ σὲ ἑπτὰ ἴσα μέρη μὲ χρήση κανόνα καὶ διαβήτη. Μπορεῖτε νὰ θεωρήσετε γνωστὴ τὴν ταυτότητα $\cos\theta = 64\cos^7(\theta/7) - 112\cos^5(\theta/7) + 56\cos^3(\theta/7) - 7\cos(\theta/7)$. μον. 1

3. Ἔστω $\zeta = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ καὶ $L = \mathbb{Q}(\zeta)$. Πρὶν προχωρήσετε, νὰ βεβαιωθεῖτε ὅτι καταλάβατε ποιὰ εἶναι ἡ βασικὴ ἰδιότητα τοῦ ζ καὶ ποιὸ εἶναι τὸ ἐλάχιστο πολυώνυμό του πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ (γνωστὸ ἀπ' τὸ μάθημα).
(α′) Γιατὶ ἡ $L/\mathbb{Q}$ εἶναι ἐπέκταση Galois; Ποιὰ εἶναι ἡ τάξη τῆς ὁμάδας $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$;
Οἱ ἀπαντήσεις σας τεκμηριωμένες **ξεκάθαρα**, βάσει θεωρημάτων. μον. 0.5
(β′) Θεωρῆστε δεδομένη τὴν ὕπαρξη $\sigma \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ τέτοιου ὥστε $\sigma(\zeta) = \zeta^3$. Κατασκευᾶστε τὸν πίνακα τιμῶν $\sigma^k(\zeta)$ γιὰ $k = 0, 1, \ldots, 5$ καὶ ἐξηγεῖστε **μὲ σαφήνεια** γιατὶ $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \langle\sigma\rangle$. μον. 0.5
(γ′) Χρησιμοποιώντας κάποιο σκέλος τοῦ Θεωρήματος Galois καὶ τὸ (β′), σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖο ἡ $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ εἶναι κυκλικὴ ὁμάδα, ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε ἐνδιάμεση ἐπέκταση E μεταξὺ $\mathbb{Q}$ καὶ L, ἡ ἐπέκταση $E/\mathbb{Q}$ εἶναι Galois. μον. 1
(δ′) Ἔστω $g(X) = X^{14} - 2X^7 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ καὶ θ ρίζα τοῦ $g(X)$. Παρατηρῆστε ὅτι καὶ τὸ $-1/\theta$ εἶναι ρίζα τοῦ $g(X)$ καὶ μετά, ὅτι, γιὰ κάθε ἀκέραιο k, οἱ $\zeta^k\theta$ καὶ $-\zeta^k/\theta$ εἶναι ρίζες τοῦ $g(X)$. Ἄρα, ποιὲς εἶναι οἱ 14 διαφορετικὲς ρίζες τοῦ $g(X)$ καὶ ποιὸ τὸ σῶμα ριζῶν M τοῦ $g(X)$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$; μον. 0.5
Ἔστω $u = \theta^7$. Παρατηρῆστε ὅτι τὸ u εἶναι ρίζα τοῦ $X^2 - 2X - 1$ καὶ δεῖξτε ὅτι ἡ ἐπέκταση $M/\mathbb{Q}$ εἶναι ριζική. μον. 1

4. Θεωρῆστε δεδομένο ὅτι τὸ πολυώνυμο $f(X) = X^4 - 2X^2 - 4 \in \mathbb{Q}[X]$ εἶναι ἀνάγωγο.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ρίζες του $f(X)$ εἶναι οἱ $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = -\rho$, $\rho_3 = \rho'$, $\rho_4 = -\rho'$, ὅπου $\rho = \sqrt{1+\sqrt{5}}$ καὶ $\rho' = \sqrt{1-\sqrt{5}}$. Ἀποδεῖξτε, ἐπίσης, ὅτι $\rho\rho' = 2i$, ὅπου $i^2 = -1$. Στὴ συνέχεια, ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ σῶμα ριζῶν τοῦ $f(X)$ πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ εἶναι τὸ $L = \mathbb{Q}(\rho, i)$. Ὑπολογῖστε τὸν βαθμὸ καὶ μία βάση τῆς ἐπέκτασης $L/\mathbb{Q}$, καθὼς καὶ τὴν τάξη τῆς ὁμάδας $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$. μον. 1
(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχει $\sigma \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ τέτοιος ὥστε $\sigma(\rho) = \rho'$ καὶ $\sigma(i) = -i$. Θεωρῆστε δεδομένο ὅτι ὑπάρχει $\tau \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ τέτοιος ὥστε $\tau(\rho) = \rho$ καὶ $\tau(i) = -i$. Ἂν τὸ χρειαστεῖτε (δὲν εἶναι ἀπολύτως ἀπαραίτητο), μπορεῖτε νὰ θεωρήσετε δεδομένο ὅτι τὸ $f(X)$ εἶναι

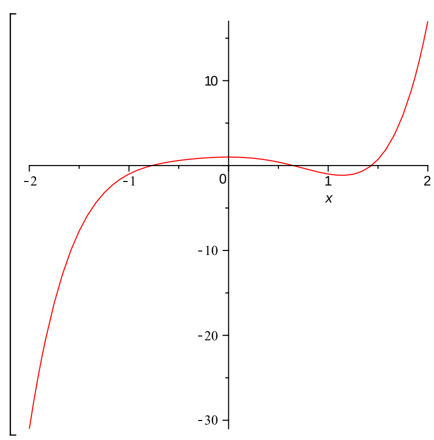
ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}(i)$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $\sigma(\rho') = -\rho$ καὶ $\tau(\rho') = -\rho'$. Γιὰ $j = 1, 2, 3, 4$ ὑπολογῖστε τὴ ρίζα ρ_k γιὰ τὴν ὁποία $\sigma(\rho_j) = \rho_k$. Μὲ αυτὸν τὸν τρόπο ἀντιστοιχῖστε στὸν σ μιὰ μετάθεση τῆς S_4. Μὲ ἀνάλογο τρόπο βρεῖτε ποιὰ μετάθεση τῶν ριζῶν ἀντιστοιχεῖ στὸν αὐτομορφισμὸ $\sigma^2\tau$. μον. 1

(γ′) Ὑπολογῖστε τὴν τάξη τοῦ αὐτομορφισμοῦ $\sigma^2\tau$, ἄρα καὶ τὴν τάξη τῆς ὑποομάδας $\langle\sigma^2\tau\rangle$. (Ὑπόδειξη: Ἂν ἔχετε ἀπαντήσει στὸ τελευταῖο ἐρώτημα τοῦ (β′), τότε τὸ (γ′) βγαίνει σὲ μιὰ γραμμή.) Ἀποδεῖξτε τὴν ἀντιστοιχία Galois: $\langle\sigma^2\tau\rangle \leftrightarrow \mathbb{Q}(i\rho)$. μον. 1.5

(δ′) Ἐκφρᾶστε τὴν $\sqrt{5}$, μία φορά συναρτήσει τοῦ ρ καὶ μία φορά συναρτήσει τοῦ ρ'. Ὕστερα, ἀποδεῖξτε τὴν ἀντιστοιχία Galois: $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \leftrightarrow \langle\sigma^2, \tau\rangle$. Εἶναι ἡ $\langle\sigma^2, \tau\rangle$ κανονικὴ ὑποομάδα τῆς $\mathcal{G}((/L)/\mathbb{Q})$; μον. 1.5

5. Στὸ σχῆμα 1 βλέπετε τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς πραγματικῆς συνάρτησης $x \mapsto x^5 - 2x^2 - x^3 + 1$ (ὅπως ὑποδηλώνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, ἀπ' τὰ δεξιὰ ἡ γραφικὴ παράσταση συνεχίζει πρὸς το $+\infty$ κι ἀπ' τ' ἀριστερὰ πρὸς τὸ $-\infty$). Θεωρῆστε δεδομένο ὅτι τὸ πολυώνυμο $f(X) = X^5 - 2X^2 - X^3 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ εἶναι ἀνάγωγο πάνω ἀπ' τὸ $\mathbb{Q}$ καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ πολυώνυμο αὐτὸ δὲν εἶναι ἐπιλύσιμο μὲ ριζικά. Ἡ ἀπόδειξή σας πρέπει νὰ βασιστεῖ σὲ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα **ἀπαραιτήτως** θὰ διατυπώσετε μὲ ἀκρίβεια. μον. 1

Σχῆμα 1: ἄσκηση 5



Βαθμολογία: Σύνολο μονάδων 11.5. Βάση: 5, ὑπὸ τὴν ἀπαραίτητη προϋπόθεση ὅτι, **στὸ ἐρώτημα 4, θὰ συγκεντρώσετε τουλάχιστον 2 μονάδες**.