Δευτεροβάθμιες Καμπύλες

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Τελευταία αναθεώρηση: Ἰανουάριος 2004

Ἡ πιὸ γενικὴ ἐξίσωση δευτεροβάθμιας καμπύλης εἶναι

$$f(X,Y) = AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0 \tag{1}$$

ὅπου ἕνα τουλάχιστον ἀπὸ τὰ A, B, C δὲν εἶναι μηδέν. Ἂν $A = B = 0$, τότε $C \neq 0$ καὶ ἐναλλάσσομε τὰ X, Y. Σὲ κάθε περίπτωση, λοιπόν, μποροῦμε νὰ ὑποθέσομε ὅτι

$$A^2 + B^2 \neq 0 \tag{2}$$

Οἱ ἑξῆς ποσότητες παίζουν πολὺ σημαντικὸ ρόλο:

$$J_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \ , \ \ J_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \ . \tag{3}$$

Διακρίνομε δύο βασικὲς περιπτώσεις:

1 $J_2 \neq 0$

1.1 Εὕρεση νέας ἀρχῆς ἀξόνων

Ἀναζητοῦμε κέντρο συμμετρίας (X_0, Y_0) γιὰ τὴν καμπύλη, τὸ ὁποῖο θὰ κάνομε νέα ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

Τὸ (ἄγνωστο πρὸς τὸ παρὸν) σημεῖο (X_0, Y_0) εἶναι κέντρο συμμετρίας τῆς καμπύλης ἂν καὶ μόνο ἂν κάθε σημεῖο (X, Y) τῆς καμπύλης ἔχει καὶ τὸ συμμετρικό του πάνω στὴν καμπύλη. Ὅμως, τὸ συμμετρικὸ τοῦ σημείου (X, Y) ὡς πρὸς τὸ σημεῖο (X_0, Y_0) εἶναι τὸ $(2X_0 - X, 2Y_0 - Y)$, ἄρα, ἡ ἀναλυτικὴ διατύπωση τῆς πρότασης «τὸ (X_0, Y_0) εἶναι κέντρο συμμετρίας τῆς καμπύλης» εἶναι:

$$f(X,Y) = 0 \Longleftrightarrow f(2X_0 - X, 2Y_0 - Y) = 0 \ .$$

Ὑπολογίζοντας τὸ $f(2X_0 - X, 2Y_0 - Y)$, καταλήγομε στὴν παρακάτω ἰσοδυναμία

$$\begin{aligned} f(X,Y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & (AX_0 + BY_0 + D)X + (BX_0 + CY_0 + E)Y = \\ & AX_0^2 + 2BX_0Y_0 + CY_0^2 + DX_0 + EY_0 \end{aligned}$$

Ἂν δὲν εἶναι καὶ οἱ τρεῖς συντελεστὲς τῆς δεξιᾶς ἐξίσωσης μηδενικοί, τότε ἡ δεξιὰ ἐξίσωση παριστάνει εὐθεία, ὁπότε ἡ παραπάνω ἰσοδυναμία λέει ὅτι ἕνα σημεῖο (X, Y)

ἀνήκει στὴν καμπύλη, ἂν καὶ μόνο ἂν ἀνήκει σὲ μία εὐθεία, πρᾶγμα ἀδύνατο[1]. Ἀναγκαστικά, λοιπόν, ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$\begin{aligned} AX_0 + BY_0 + D &= 0 \\ BX_0 + CY_0 + E &= 0 \, . \end{aligned}$$

Τὸ σύστημα αὐτό, ὡς πρὸς (X_0, Y_0) ἔχει τὴ λύση[2]

$$X_0 = \frac{BE - CD}{J_2} \, , \; Y_0 = \frac{BD - AE}{J_2} \, . \tag{4}$$

> *Παρατηρῆστε ὅτι τὸ παραπάνω γραμμικὸ σύστημα «φτιάχνεται» ἀπὸ τὶς δύο πρῶτες γραμμὲς τῆς ὁρίζουσας J_3.*

1.1.1 Παράδειγμα

Ἔστω ἡ καμπύλη μὲ ἐξίσωση (1), στὴν ὁποία

$$A = 5, \, B = 20, \, C = -4, \, D = -1, \, E = 2, \, F = 7 \, .$$

Ἐδῶ εἶναι $J_2 = -420$ καὶ ἔχομε νὰ λύσομε τὸ γραμμικὸ σύστημα $5X_0 + 20Y_0 - 1 = 0$, $20X_0 - 4Y_0 + 2 = 0$, τοῦ ὁποίου ἡ λύση εἶναι $(X_0, Y_0) = (-3/35, 1/14)$. Αὐτὸ τὸ σημεῖο θὰ εἶναι ἡ νέα ἀρχὴ τῶν ἀξόνων. Τὸ παράδειγμα θὰ συνεχισθεῖ παρακάτω.

1.1.2 $J_3 = 0$

Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἀρκεῖ ἡ μεταφορὰ τῶν ἀξόνων στὸ σημεῖο (X_0, Y_0), χωρὶς νὰ γίνει στροφὴ τῶν ἀξόνων. Πράγματι, τότε οἱ νέες συντεταγμένες (x, y) συνδέονται μὲ τὶς (X, Y) μέσῳ τῶν σχέσεων

$$X = x + X_0 \, , \; Y = y + Y_0$$

καὶ ἡ ἀντικατάσταση στὴν $f(X, Y) = 0$ δίνει, γιὰ τὶς συγκεκριμένες τιμὲς τῶν X_0, Y_0 (βλ. (4)), τὴν ἐξίσωση

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 \, .$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτὴ παριστάνει στὸ πραγματικὸ ἐπίπεδο δύο διαφορετικὲς τεμνόμενες εὐθεῖες, ἢ δύο ταυτιζόμενες εὐθεῖες, ἢ ἕνα μόνο σημεῖο· βλ. ἄσκηση 1.

1.2 Στροφὴ τῶν ἀξόνων

Ἡ στροφὴ τῶν ἀξόνων κατὰ γωνία θ (ὁποιαδήποτε κι ἂν εἶναι αὐτή), ὁδηγεῖ σὲ νέες συντεταγμένες (x, y). Μᾶς εἶναι ἤδη γνωστὸ ἀπὸ τὰ προηγούμενα μαθήματα ὅτι,

[1] Ὁ συλλογισμὸς αὐτὸς δὲν εἶναι ἀπολύτως αὐστηρός, ἀλλὰ δὲν εἶναι σκόπιμο νὰ μποῦμε σὲ περισσότερες λεπτομέρειες.

[2] Ἂν ἀντικατασταθεῖ ἡ παρακάτω λύση (X_0, Y_0) στὸν σταθερὸ ὅρο $AX_0^2 + \cdots + EY_0$ διαπιστώνεται, ὕστερα ἀπὸ πράξεις, ὅτι τὸν μηδενίζει.

μετὰ τὴ στροφὴ καὶ τὴ μεταφορὰ τῶν ἀξόνων, οἱ νέες συντεταγμένες συνδέονται μὲ τὶς παληὲς μέσῳ τῆς σχέσεως

$$\begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{συν}\,\theta & -\text{ημ}\,\theta \\ \text{ημ}\,\theta & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \tag{5}$$

δηλαδή,

$$X = x\,\text{συν}\,\theta - y\,\text{ημ}\,\theta + X_0\ ,\ Y = x\,\text{ημ}\,\theta + y\,\text{συν}\,\theta + Y_0$$

καὶ ἡ ἀντικατάσταση στὴν (1) δίνει, ὕστερα ἀπὸ κάποιες πράξεις, στὶς ὁποῖες λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ (4), τὴν ἐξίσωση

$$\begin{aligned} 0 = & J_2(A\,\text{συν}^2\,\theta + 2B\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta + C\,\text{ημ}^2\,\theta)x^2 \\ & + J_2((C - A)\,\text{ημ}\,2\theta + 2B\,\text{συν}\,2\theta)xy \\ & + J_2(C\,\text{συν}^2\,\theta - 2B\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta + A\,\text{ημ}^2\,\theta)y^2 + J_3 \end{aligned}$$

Ὁρίζομε τώρα τὴ γωνία θ ἔτσι ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ xy νὰ μηδενισθεῖ. Ἄρα,

Ἂν $A = C$, ἀρκεῖ νὰ πάρομε $\theta = \pi/4$.

Ἂν $A \neq C$, ἀρκεῖ νὰ πάρομε $2\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ὥστε $\text{εφ}\,2\theta = \dfrac{2B}{A - C}$.

Γιὰ τὸν μετασχηματισμὸ (5) χρειάζεται ὄχι ἡ ἴδια ἡ γωνία θ, ἀλλὰ τὰ $\text{συν}\,\theta$ καὶ $\text{ημ}\,\theta$. Χρήσιμοι ἐδῶ εἶναι οἱ τύποι

$$\text{συν}^2\,2\theta = \frac{1}{1 + \text{εφ}^2\,2\theta}\ ,\ \text{συν}^2\,\theta = \frac{1 + \text{συν}\,2\theta}{2}\ ,\ \text{ημ}^2\,\theta = \frac{1 - \text{συν}\,2\theta}{2}\ .$$

Σημειωτέον ὅτι, τὰ $\text{συν}\,2\theta$ καὶ $\text{συν}\,\theta$ εἶναι μὴ ἀρνητικά, λόγῳ τοῦ ὅτι $2\theta \in (-\pi/2\,,\,\pi/2)$, ἐνῶ τὸ $\text{ημ}\,\theta$ ἔχει τὸ ἴδιο πρόσημο μὲ τὴν $\text{εφ}\,2\theta$. **Αὐτὸ πρέπει νὰ προσεχθεῖ ὅταν βγάζομε τετραγωνικὲς ρίζες στὸν τύπο τοῦ $\text{ημ}^2\,\theta$.**

1.2.1 Συνέχεια τοῦ Παραδείγματος 1.1.1

Στὸ παράδειγμα ποὺ ἀρχίσαμε προηγουμένως, $A \neq C$, ἄρα, ἔχομε διαδοχικά,

$$\text{εφ}\,2\theta = \frac{40}{9}\ ,\ \text{συν}^2\,2\theta = \frac{81}{1681}\ ,\ \text{συν}\,2\theta = \frac{9}{41}\ ,$$

$$\text{συν}^2\,\theta = \frac{25}{41}\ ,\ \text{συν}\,\theta = \frac{5}{\sqrt{41}}\ ,\ \text{ημ}^2\,\theta = \frac{16}{41}\ ,\ \ \text{ημ}\,\theta = \frac{4}{\sqrt{41}}\ .$$

Σημειωτέον ὅτι, πήραμε τὸ $\text{ημ}\,\theta$ θετικό, διότι $\text{εφ}\,2\theta > 0$.

1.3 Κανονικὴ μορφὴ τῆς ἐξίσωσης

Ὁρίζοντας νέα ἀρχὴ ἀξόνων τὴν (X_0, Y_0), σύμφωνα μὲ τὴν ἑνότητα 1.1, καὶ στροφὴ τῶν ἀξόνων κατὰ γωνία θ, σύμφωνα μὲ τὴν ἑνότητα 1.2 ὁδηγούμαστε σὲ μία ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$Kx^2 + Ly^2 + M = 0\ . \tag{6}$$

Ἀνάλογα μὲ τὰ $\text{sgn}(K), \text{sgn}(L), \text{sgn}(M)$ [3], ἡ ἐξίσωση αὐτὴ παριστάνει στὸ πραγματικὸ ἐπίπεδο ἔλλειψη ἢ κύκλο, ὑπερβολή, δύο εὐθεῖες, ἕνα σημεῖο, ἢ τὸ κενὸ σύνολο· βλ. ἄσκηση 2.

[3] Γενικά, $\text{sgn}(x) = +1, -1,$ ἢ 0, ἀνάλογα μὲ τὸ ἂν τὸ x εἶναι θετικό, ἀρνητικό,ἢ μηδέν.

1.3.1 Συνέχεια τοῦ Παραδείγματος 1.2.1

Μὲ βάση τοὺς ὑπολογισμοὺς στὶς ὑποενότητες 1.1.1 καὶ 1.2.1, ἡ μεταφορὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων στὸ σημεῖο (X_0, Y_0) καὶ ἡ στροφὴ κατὰ γωνία θ ἀντιστοιχεῖ στοὺς τύπους

$$X = \frac{5x - 4y}{\sqrt{41}} - \frac{3}{35} \;,\; Y = \frac{4x + 5y}{\sqrt{41}} + \frac{1}{14}$$

καὶ ἡ ἀντικατάσταση στὴν $f(X,Y) = 5X^2 + 40XY - 4Y^2 - 2X + 4Y + 7 = 0$ δίνει, ὕστερα ἀπὸ τὶς πράξεις

$$21x^2 - 20y^2 + \frac{253}{35} = 0 \;, \;\; \text{ἤ, ἰσοδύναμα,} \;\; \frac{x^2}{\frac{253}{735}} - \frac{y^2}{\frac{253}{700}} = 1 \;,$$

ποὺ εἶναι ἐξίσωση μιᾶς ὑπερβολῆς.

2 $J_2 = 0$

2.1 Στροφὴ τῶν ἀξόνων

Στὴν περίπτωση αὐτὴ στρέφομε τοὺς ἄξονες κατὰ γωνία θ, ὅπου

$$\text{συν}\,\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \;,\; \text{ημ}\,\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \;.$$

Στὸ νέο σύστημα ἀξόνων ἂς συμβολίζομε τὶς συντεταγμένες (x', y'). Συνεπῶς,

$$X = \frac{Ax' - By'}{\sqrt{A^2 + B^2}} \;,\; Y = \frac{Bx' + Ay'}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{7}$$

καὶ ἡ ἀντικατάσταση στὴν $f(X,Y) = 0$ δίνει (λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν ὅτι $B^2 = AC$)

$$A(A+C)^2 x'^2 + 2(AD+BE)\sqrt{A^2 + B^2}\, x' + 2(AE-BD)\sqrt{A^2 + B^2}\, y' + AF(A+C) \;. \tag{8}$$

Ἐδῶ ὁ συντελεστὴς τοῦ x'^2 εἶναι $\neq 0$, διότι $A(A+C) = A^2 + AC = A^2 + B^2$, τὸ ὁποῖο ἐξ ἀρχῆς ἔχει ὑποτεθεῖ διάφορο τοῦ μηδενός (βλ. 2).

2.1.1 Παράδειγμα

Ἔστω ἡ καμπύλη, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν (1) ὅταν

$$A = 1,\; B = 2,\; C = 4,\; D = 1,\; E = -2,\; F = 3 \;.$$

Ἐδῶ $J_2 = 0$ καὶ στρέφομε τοὺς ἄξονες κατὰ γωνία θ, ὅπου $\text{συν}\,\theta = 1/\sqrt{5}$, $\text{ημ}\,\theta = 2/\sqrt{5}$. Οἱ νέες συντεταγμένες x', y' συνδέονται μὲ τὶς ἀρχικὲς μέσῳ τῶν σχέσεων

$$X = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}} \;,\; Y = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}$$

καὶ ἡ ἀντικατάσταση στὴν $f(X,Y) = 0$ δίνει

$$5x'^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x' - \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 3 = 0 \;.$$

Τὸ παράδειγμα συνεχίζεται παρακάτω.

2.2 Κανονικὴ μορφὴ τῆς ἐξίσωσης

Ἡ ἐξίσωση, στὴν ὁποία καταλήξαμε παραπάνω, εἶναι τῆς μορφῆς

$$Kx'^2 + Lx' + My' + N = 0 \ , \ K \neq 0 \ . \tag{9}$$

Ἂν $\boxed{M = 0}$ ἡ ἐξίσωση αὐτὴ παριστάνει στὸ πραγματικὸ ἐπίπεδο δύο παράλληλες εὐθεῖες (διαφορετικὲς ἢ ταυτιζόμενες), ἢ τὸ κενὸ σύνολο· βλ. ἄσκηση 3. Στὴν περίπτωση αὐτὴ δὲν χρειάζεται νὰ κάνομε μεταφορὰ στοὺς ἄξονες.

Ἂν $\boxed{M \neq 0}$ θὰ χρειασθεῖ μεταφορὰ τῆς ἀρχῆς σ' ἕνα σημεῖο μὲ συντεταγμένες ὡς πρὸς τὸ (x', y')-σύστημα ἔστω (x'_0, y'_0). Τὶς συντεταγμένες τοῦ νέου συστήματος, τὸ ὁποῖο θὰ προκύψει ἀπὸ αὐτὴ τὴ μεταφορά, θὰ συμβολίζομε (x, y). Σκοπός εἶναι νὰ ἐπιλέξομε κατάλληλα τὰ x'_0, y'_0 ὥστε ἀπὸ τὴν ἐξίσωση ὡς πρὸς x, y, τὴν ὁποία θὰ βροῦμε, νὰ ἀπουσιάζει ὁ πρωτοβάθμιος ὅρος x, καθὼς καὶ ὁ σταθερὸς ὅρος. Ἔτσι,

$$x' = x + x'_0 \ , \ y' = y + y'_0$$

καὶ ἀντικαθιστώντας στὴν (9) βρίσκομε ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ x εἶναι $2Kx'_0 + L$, ἐνῶ ὁ σταθερὸς ὅρος $K{x'_0}^2 + Lx'_0 + My'_0 + N$. Ἐπειδὴ $KM \neq 0$, τὸ σύστημα αὐτὸ ἔχει μοναδικὴ λύση τὴν

$$x'_0 = -\frac{L}{2K} \ , \ y'_0 = \frac{L^2 - 4KN}{4MK} \ .$$

Ἄν, λοιπόν, μεταφερθεῖ ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων στὸ σημεῖο αὐτό, τότε ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωση θὰ πάρει, τελικά, τὴ μορφὴ

$$y = -\frac{K}{M}x^2 \ ,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς.

Ἡ νέα ἀρχὴ τῶν ἀξόνων ἔχει συντεταγμένες γνωστὲς ὡς πρὸς τὸ (x', y')-σύστημα συντεταγμένων. Γιὰ νὰ βροῦμε τὶς συντεταγμένες της, ἔστω (X_0, Y_0), ὡς πρὸς τὸ (X, Y)-σύστημα συντεταγμένων πρέπει νὰ κάνομε χρήση τῶν σχέσεων (7) μὲ τὰ (X_0, Y_0) στὴ θέση τῶν (X, Y) καὶ τὰ (x'_0, y'_0) στὴ θέση τῶν (x', y').

2.2.1 Συνέχεια τοῦ Παραδείγματος 2.1.1

Ἐδῶ $K = 5$, $L = -6/\sqrt{5}$, $M = -8/\sqrt{5}$, $N = 3$ καί, σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, θὰ γίνει μεταφορὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων στὸ σημεῖο $(x'_0, y'_0) = (\frac{3\sqrt{5}}{25}, \frac{33\sqrt{5}}{100})$, ὁπότε ἡ ἐξίσωση τῆς καμπύλης θὰ πάρει τὴν κανονικὴ μορφὴ

$$y = \frac{5\sqrt{5}}{8}x^2 \quad \text{(ἐξίσωση παραβολῆς.)}$$

Ἡ νέα ἀρχὴ τῶν ἀξόνων, δηλαδή, τὸ σημεῖο (x'_0, y'_0), ἔχει, ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸ σύστημα ἀξόνων, συντεταγμένες ποὺ ὑπολογίζονται βάσει τῶν (7) : $(X_0, Y_0) = (-27/50, 57/100)$.

3 Ἀσκήσεις

1. Ἔστω ἡ ἐξίσωση $Kx^2 + Lxy + My^2 = 0$, στὴν ὁποία τὰ K, L, M δὲν εἶναι καὶ τὰ τρία μηδέν. Δεῖξτε ὅτι, στὸ πραγματικὸ ἐπίπεδο, ἡ ἐξίσωση αὐτὴ παριστάνει: (α′) Δύο (διαφορετικὲς) τεμνόμενες εὐθεῖες ἂν $L^2 - 4KM > 0$. (β′) Δύο ταυτιζόμενες εὐθεῖες[4], ἂν $L^2 - 4KM = 0$. (γ′) Τὸ σημεῖο $(0, 0)$, καὶ μόνο αὐτό, ἂν $L^2 - 4KM < 0$.

2. Ἔστω ἡ ἐξίσωση $Kx^2 + Ly^2 + M = 0$, ὅπου οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ K, L, M δὲν εἶναι καὶ οἱ τρεῖς μηδέν. Δεῖξτε ὅτι, στὸ πραγματικὸ ἐπίπεδο, ἡ ἐξίσωση αὐτὴ παριστάνει: (α′) Ἔλλειψη ἢ κύκλο, ἂν $KLM \neq 0$ καὶ $\mathrm{sgn}(K) = \mathrm{sgn}(L) = -\mathrm{sgn}(M)$. (β′) Ὑπερβολή, ἂν $KLM \neq 0$ καὶ $\mathrm{sgn}(K) = -\mathrm{sgn}(L)$. (γ′) Ζεῦγος τεμνομένων στὸ $(0, 0)$ εὐθειῶν, ἂν $KL \neq 0$, $M = 0$ καὶ $\mathrm{sgn}(K) = -\mathrm{sgn}(L)$. (δ′) Τὸ σημεῖο $(0, 0)$ (καὶ μόνο αὐτό), ἂν $KL \neq 0$, $M = 0$ καὶ $\mathrm{sgn}(K) = \mathrm{sgn}(L)$. (ε′) Ζεῦγος παραλλήλων εὐθειῶν, ἂν $KM \neq 0$, $L = 0$ καὶ $\mathrm{sgn}(K) = -\mathrm{sgn}(M)$ ἢ ἂν $LM \neq 0$, $K = 0$ καὶ $\mathrm{sgn}(L) = -\mathrm{sgn}(M)$. (ϛ′) Κενὸ σύνολο, ἂν $KM \neq 0$, $L = 0$ καὶ $\mathrm{sgn}(K) = \mathrm{sgn}(M)$ ἢ ἂν $LM \neq 0$, $K = 0$ καὶ $\mathrm{sgn}(L) = \mathrm{sgn}(M)$.

3. Ἔστω ἡ ἐξίσωση $Kx^2 + Lx + N = 0$, $K \neq 0$. Δεῖξτε ὅτι, στὸ πραγματικὸ ἐπίπεδο ἡ ἐξίσωση αὐτὴ παριστάνει δύο παράλληλες εὐθεῖες ἂν $L^2 - 4KN > 0$, δύο ταυτιζόμενες εὐθεῖες ἂν $L^2 - 4KN = 0$ καὶ τὸ κενὸ σύνολο ἂν $L^2 - 4KN < 0$.

4. Σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω περιπτώσεις δευτεροβάθμιας καμπύλης ὑπολογίστε τὶς συντεταγμένες (X_0, Y_0) κατάλληλης νέας ἀρχῆς ἀξόνων καὶ στροφὴ τῶν ἀξόνων κατὰ κατάλληλη γωνία θ, ὥστε ἡ ἐξίσωση τῆς καμπύλης, στὶς νέες συντεταγμένες (x, y) νὰ ἔχει κανονικὴ μορφή. Τί εἴδους καμπύλη παριστάνει ἡ ἐξίσωση; Βρεῖτε τὶς συντεταγμένες τῶν ἑστιῶν της (ἂν ἔχει) καὶ τὴν ἐξίσωση τῆς διευθετούσας της (ἂν ἔχει) ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸ (δηλαδή, τὸ X, Y) σύστημα ἀναφορᾶς.

   (α′) $3X^2 + 12XY + 8Y^2 - 2X + 4Y + 1 = 0$. [Ἀπάντηση: $(X_0, Y_0) = (-5/3, 1)$, $\text{συν}\,\theta = 3/\sqrt{13}$, $\text{ημ}\,\theta = -2/\sqrt{13}$, $-x^2 + 12y^2 + \frac{14}{3} = 0$, ὑπερβολὴ μὲ ἑστίες, τῶν ὁποίων οἱ (X, Y)-συντεταγμένες εἶναι $(-\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{5}{3}, \frac{\sqrt{14}}{3} + 1)$ καὶ $(\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{5}{3}, -\frac{\sqrt{14}}{3} + 1)$]

   (β′) $5X^2 - 4XY + 2Y^2 + 12X - 6Y + 1 = 0$. [Ἀπάντηση: $(X_0, Y_0) = (-1, 1/2)$, $\text{συν}\,\theta = 2/\sqrt{5}$, $\text{ημ}\,\theta = -1/\sqrt{5}$, $6x^2 + y^2 - \frac{13}{2} = 0$, ἔλλειψη, μὲ ἑστίες, τῶν ὁποίων οἱ (X, Y)-συντεταγμένες εἶναι $(-\frac{\sqrt{39}}{6} - 1, -\frac{\sqrt{39}}{3} + \frac{1}{2})$ καὶ $(\frac{\sqrt{39}}{6} - 1, \frac{\sqrt{39}}{3} + \frac{1}{2})$]

   (γ′) $5X^2 - 4XY + 2Y^2 + 12X - 6Y + \frac{15}{2} = 0$. [Ἀπάντηση: $(X_0, Y_0) = (-1, 1/2)$, $\text{συν}\,\theta = 2/\sqrt{5}$, $\text{ημ}\,\theta = -1/\sqrt{5}$, $6x^2 + y^2 = 0$, ἕνα μόνο σημεῖο, τὸ (X_0, Y_0).]

---

[4] Γιὰ κάποιους λόγους, ποὺ δὲν εἶναι σκόπιμο νὰ ἐξηγηθοῦν ἐδῶ, μία ἐξίσωση τῆς μορφῆς $(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, θεωροῦμε ὅτι παριστάνει ὄχι *μία* εὐθεία, ἀλλὰ *δύο ταυτιζόμενες* εὐθεῖες.

(δ′) $7X^2 - 12XY + 2Y^2 - 22X + 44Y - 33 = 0$. [᾿Απάντηση: $(X_0, Y_0) = (5, 4)$, $\text{συν}\,\theta = 3/\sqrt{13}$, $\text{ημ}\,\theta = -2/\sqrt{13}$, $11x^2 - 2y^2 = 0$, δύο διαφορετικές, τεμνόμενες στὸ (X_0, Y_0), εὐθεῖες.]

(ε′) $4X^2 + 12XY + 9Y^2 + 2\sqrt{13}X + 2\sqrt{13}Y - 1 = 0$. [᾿Απάντηση: $(X_0, Y_0) = (47\sqrt{13}/169, -53\sqrt{13}/169)$, $\text{συν}\,\theta = 2/\sqrt{13}$, $\text{ημ}\,\theta = 3/\sqrt{13}$,
$13x^2 - 2y = 0$, παραβολὴ μὲ ἑστία, τῆς ὁποίας οἱ (X, Y)-συντεταγμένες εἶναι $(\frac{7\sqrt{13}}{26}, -\frac{4\sqrt{13}}{13})$ καὶ διευθετούσα $3X - 2Y = 3\sqrt{13}/2$.]

(ϛ′) $X^2 - 4XY + 4Y^2 - 2X + 4Y + 5 = 0$. [᾿Απάντηση: $\text{συν}\,\theta = 1/\sqrt{5}$, $\text{ημ}\,\theta = -2/\sqrt{5}$, $5x'^2 - 2\sqrt{5}x' + 5 = 0$, κενὸ σύνολο. Δὲν χρειάζεται να γίνει μεταφορὰ τῶν ἀξόνων.]

(ζ′) $9X^2 + 6XY + Y^2 + 6X + 2Y + 1 = 0$. [᾿Απάντηση: $\text{συν}\,\theta = 3/\sqrt{10}$, $\text{ημ}\,\theta = 1/\sqrt{10}$, $10x'^2 + 2\sqrt{10}x' + 1 = 0$, δύο ταυτιζόμενες εὐθεῖες. Δὲν χρειάζεται να γίνει μεταφορὰ τῶν ἀξόνων.]

(η′) $4X^2 - 4XY + Y^2 + 4X - 2Y - 1 = 0$. [᾿Απάντηση: $\text{συν}\,\theta = 2/\sqrt{5}$, $\text{ημ}\,\theta = -1/\sqrt{5}$, $5x'^2 + 2\sqrt{10}x' - 1 = 0$, δύο παράλληλες εὐθεῖες. Δὲν χρειάζεται να γίνει μεταφορὰ τῶν ἀξόνων.]