Εἰσαγωγικὲς γνώσεις στὴν Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία

Σύντομη ἐπανάληψη γνωστῶν πραγμάτων

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Χειμερινὸ Ἑξάμηνο 2002-2003

1. **Ἄξονας**: Εὐθεία στὴν ὁποία: (1) Εἶναι ὁρισμένο ἕνα σημεῖο O, ποὺ λέγεται *ἀρχή*. (2) Ἔχει καθορισθεῖ ποιὰ ἀπὸ τὶς ἡμιευθεῖες ἀρχῆς O εἶναι ἡ θετικὴ καὶ ποιὰ ἡ ἀρνητική. Δηλαδή, ἡ εὐθεία εἶναι *προσανατολισμένη*. (3) Ἔχει ὁρισθεῖ ποιὸ εἶναι τὸ μοναδιαῖο μῆκος, δηλαδή, ἡ μονάδα μετρήσεως μηκῶν πάνω στὸν ἄξονα.

   (α′) Στὸν ἄξονα πάνω ὁρίζονται *προσανατολισμένα εὐθύγραμμα τμήματα*. Γιὰ κάθε προσανατολισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα AB πάνω σ' ἕναν ἄξονα ὁρίζεται ἡ *ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ* AB, συμβολιζόμενη (AB). Πρόκειται, οὐσιαστικά, γιὰ τὸ «προσανατολισμένο μῆκος AB». Προσοχή! Τὸ (AB) εἶναι ἀριθμός, ὄχι εὐθύγραμμο τμῆμα! Βασικὴ σχέση: $(BA) = -(AB)$.

   (β′) *Συντεταγμένη σημείου πάνω σὲ ἄξονα.* Ἔστω ἄξονας $\alpha = X'X$ μὲ ἀρχὴ O καὶ σημεῖο A ὁπουδήποτε. Τὸ A μπορεῖ νὰ ἀνήκει ἢ νὰ μὴν ἀνήκει στὸν ἄξονα. Προβάλλομε τὸ A πάνω στὸν ἄξονα καὶ ἔστω A' ἡ προβολή του (ἂν τὸ A βρίσκεται στὸν ἄξονα, τὸ A' ταυτίζεται, φυσικά, μὲ τὸ A).
   Ὀνομάζομε συντεταγμένη τοῦ A πάνω στὸν ἄξονα $X'X$, καὶ τὴ συμβολίζομε X_A, τὸν ἀριθμὸ (OA'). Ἂν τὰ σημεῖα A, B βρίσκονται πάνω στὸν ἄξονα, τότε $(AB) = X_B - X_A$. Ἀπὸ αὐτὴ τὴ σχέση προκύπτει ὁ σημαντικὸς κανόνας γιὰ *ὁποιαδήποτε* τρία σημεῖα A, B, C τοῦ ἄξονα:

   $$(AB) + (BC) + (CA) = 0 \quad \text{ἤ, ἰσοδύναμα,} \quad (AB) + (BC) = (AC)$$

   (Κανόνας τοῦ Chasles)

   Ὁ κανόνας γενικεύεται γιὰ ὁσοδήποτε πλῆθος σημείων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ τοῦ ἄξονα:

   $$(A_1A_2) + (A_2A_3) + \cdots + (A_{n-2}A_{n-1}) + (A_{n-1}A_n) = (A_1A_n)\ .$$

2. **Διάνυσμα**. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, τοῦ ὁποίου εἶναι καθορισμένη ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας. Συμβολισμός: Ὅταν ἡ ἀρχὴ εἶναι τὸ A καὶ πέρας τὸ B γράφομε $\overrightarrow{AB}$. Βασικὲς ἔννοιες σχετικὲς μὲ τὰ διανύσματα: *διεύθυνση* ἢ *φορέας*, *φορὰ* καὶ *μέτρο* ἢ *μῆκος*. Τὸ μῆκος ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ συμβολίζεται μὲ $\|\overrightarrow{AB}\|$. *Διέυθυνση καὶ φορὰ* διανύσματος. Δὲν ἔχει νόημα νὰ συγκρίνομε φορὲς δύο διανυσμάτων, παρὰ μόνο ἂν αὐτὰ ἔχουν τὴν ἴδια διεύθυνση!

   (α′) *Ἰσότητα διανυσμάτων.* Λέμε ὅτι τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{CD}$ εἶναι ἴσα, καὶ γράφομε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, ἂν τὰ διανύσματα αὐτὰ ἔχουν τὴν ἴδια διεύθυνση, τὴν ἴδια φορὰ καὶ τὸ ἴδιο μῆκος. Συνεπῶς, δὲν εἶναι ἀπαραίτητο νὰ ταυτίζονται γιὰ νὰ ποῦμε πὼς εἶναι ἴσα. Γιὰ παράδειγμα, ἂν $ABCD$ εἶναι παραλληλόγραμμο (προσοχὴ στὴ σειρὰ ποὺ εἶναι γραμμένες οἱ κορυφές!), τότε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Ἐπειδή, δοθέντος ἑνὸς διανύσματος, ὑπάρχουν ἄπειρα ἄλλα ἴσα μὲ αὐτό, συχνὰ λέμε π.χ. «ἔστω τὸ διάνυσμα $\vec{u}$» καὶ μποροῦμε νὰ πάρομε σὰν $\vec{u}$ ὁποιοδήποτε ἀπὸ τὰ ἄπειρα διανύσματα ποὺ εἶναι ἴσα μὲ τὸ $\vec{u}$. Στὴν περίπτωση τοῦ παραλληλογράμμου, ποὺ ἀναφέρθηκε παραπάνω, τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{DC}$ θὰ συμβολισθοῦν μὲ τὸ ἴδιο σύμβολο, π.χ. $\vec{u}$, ἐνῶ τὰ $\overrightarrow{AD}$ καὶ $\overrightarrow{BC}$ μὲ ἕνα ἄλλο σύμβολο, π.χ. $\vec{v}$.

(β′) *Ἀντίθετα διανύσματα.* Ἔχουν ἴδια διεύθυνση, ἀντίθετη φορὰ καὶ ἴσα μήκη.

(γ′) *Μηδενικὸ διάνυσμα.* Συμβολίζεται $\vec{0}$. Τὸ φανταζόμαστε σὰν ἕνα διάνυσμα τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας συμπίπτουν. Ἡ διεύθυνση καὶ ἡ φορὰ τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος εἶναι ὁποιαδήποτε, ἐνῶ τὸ μῆκος του εἶναι 0.

(δ′) *Πρόσθεση διανυσμάτων $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$.* Δύο τρόποι: (1) Καθιστοῦμε τὰ $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$ διαδοχικά, βρίσκοντας διανύσματα $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ καὶ $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$, δηλαδή, τὸ πέρας τοῦ $\vec{u}$ νὰ συμπίπτει μὲ τὴν ἀρχὴ τοῦ $\vec{v}$. Τότε $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. (2) (Ἰσοδύναμος τρόπος.) Κάνομε τὰ $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$ νὰ ἔχουν κοινὴ ἀρχή, δηλαδή, βρίσκομε διανύσματα $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ καὶ $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, κατασκευάζομε παραλληλόγραμμο $ABDC$ (προσοχή! ὄχι $ABCD$, παρατηρῆστε τὴ διαφορά!) καὶ τότε $\vec{u}+\vec{v}$ εἶναι τὸ διάνυσμα-διαγώνιος $\overrightarrow{AD}$.

(ε′) *Διαφορὰ διανυσμάτων* $\vec{u}-\vec{v}$ σημαίνει πρόσθεση τῶν $\vec{u}$ καὶ $-\vec{v}$, δηλαδή, $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

(ϛ′) *Πολλαπλασιασμὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ k ἐπὶ διάνυσμα $\vec{u}$.* Συμβολίζεται $k\vec{u}$. Ἂν $k=0$, τότε $k\vec{u}=\vec{0}$. Ἂν $k\neq 0$, τότε τὸ $k\vec{u}$ ἔχει τὴν ἴδια διεύθυνση μὲ τὸ $\vec{u}$, φορὰ ἴδια ἢ ἀντίθετη μὲ τὴ φορὰ τοῦ $\vec{u}$ ἀνάλογα μὲ τὸ ἂν $k>0$ ἢ $k<0$ καὶ μέτρο $|k|\|\vec{u}\|$, δηλαδή, $\|k\vec{u}\|=|k|\|\vec{u}\|$. Λόγῳ αὐτῆς τῆς σχέσεως, παίρνοντας $k=1/\|\vec{u}\|$, βλέπομε ὅτι

$$\left\|\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right\|=\left|\frac{1}{\|\vec{u}\|}\right|\|\vec{u}\|=\frac{1}{\|\vec{u}\|}\|\vec{u}\|=1\ ,$$

δηλαδή, *κάθε διάνυσμα διαιρεμένο μὲ τὸ μέτρο του γίνεται μοναδιαῖο.*

(ζ′) *Ἄξονας, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα διάνυσμα.* Ἔστω $\vec{u}$ μὴ μηδενικὸ διάνυσμα. Ἕνας ὁποιοσδήποτε ἄξονας παράλληλος πρὸς τὸ $\vec{u}$, ὁ ὁποῖος ἔχει θετικὴ φορὰ τὴ φορὰ τοῦ $\vec{u}$ χαρακτηρίζεται ὡς ἄξονας, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ $\vec{u}$.

3. **Προβολὴ διανύσματος πάνω σὲ ἄξονα ἢ διάνυσμα.** Ἔστω ἄξονας $\alpha=X'X$, διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ καὶ A', B' οἱ προβολὲς τῶν A, B πάνω στὸν α. *Προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ στὸν α* ὁρίζεται νὰ εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $A'B'$, καὶ συμβολίζεται $\text{πρβ}_\alpha\overrightarrow{AB}$. Δηλαδή, ἐξ ὁρισμοῦ,

$$\text{πρβ}_\alpha\overrightarrow{AB}=(A'B')=(OB')-(OA')=X_B-X_A\ .$$

Προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ πάνω σὲ ἕνα μὴ μηδενικὸ διάνυσμα $\vec{u}$ ὁρίζομε νὰ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ πάνω σὲ ἕναν ὁποιονδήποτε ἄξονα, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ $\vec{u}$ καὶ τὴ συμβολίζομε $\text{πρβ}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}$.

(α′) *Ἴσα διανύσματα ἔχουν ἴσες προβολές.* (Ἁπλῆ γεωμετρικὴ ἀπόδειξη.) Συνεπῶς, ἂν θέλομε νὰ βροῦμε τὴν προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ πάνω στὸν ἄξονα α, μποροῦμε νὰ πάρομε ἕνα ὁποιοδήποτε «βολικότερο» διάνυσμα ἴσο μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$, καὶ αὐτοῦ τὴν προβολὴ νὰ βροῦμε, π.χ. ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$, τὸ ὁποῖο νὰ ἔχει ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ O τοῦ ἄξονα α.

(β′) Ἂν A, B, C εἶναι τρία ὁποιαδήποτε σημεῖα (στὸν χῶρο ἢ τὸ ἐπίπεδο) καὶ α ἕνας ὁποιοσδήποτε ἄξονας, τότε

$$\mathsf{\pi\rho\beta}_\alpha \overrightarrow{AB} + \mathsf{\pi\rho\beta}_\alpha \overrightarrow{BC} = \mathsf{\pi\rho\beta}_\alpha \overrightarrow{AC} \ .$$

Πράγματι, ἂν A', B', C' εἶναι οἱ προβολὲς τῶν A, B, C πάνω στὸν α, τότε, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, $\mathsf{\pi\rho\beta}_\alpha \overrightarrow{AB} = (A'B')$, $\mathsf{\pi\rho\beta}_\alpha \overrightarrow{BC} = (B'C')$, $\mathsf{\pi\rho\beta}_\alpha \overrightarrow{AC} = (A'C')$. Ὅμως, ἀπὸ τὸν κανόνα τοῦ Chasles, $(A'B') + (B'C') = (A'C')$.

4. **Σύστημα συντεταγμένων ἢ σύστημα ἀξόνων ἢ σύστημα ἀναφορᾶς**. Ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τεμνόμενους ἄξονες, ἂν βρισκόμαστε στὸ ἐπίπεδο, τῶν ὁποίων ἡ τομή, ἔστω O, ἀποτελεῖ τὴν ἀρχὴ καὶ γιὰ τοὺς δύο. Στὸν χῶρο, τὸ σύστημα ἀξόνων ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἄξονες *μὴ συνεπίπεδους καὶ διερχόμενους ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο* O, τὸ ὁποῖο ἀποτελεῖ τὴν ἀρχὴ καὶ γιὰ τοὺς τρεῖς. Στὸ μάθημα θεωροῦμε, ἀποκλειστικά, *ὀρθοκανονικὰ συστήματα συντεταγμένων*. Δηλαδή, οἱ ἄξονες εἶναι κάθετοι (ὀρθογώνιοι) ὁ ἕνας μὲ τὸν ἄλλο (*ορθο*), καὶ οἱ μονάδες μετρήσεως σὲ ὅλους τοὺς ἄξονες εἶναι οἱ ἴδιες (*κανονικος*). Στὰ παρακάτω, θεωροῦμε ἕνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων $\alpha = X'X$, $\beta = Y'Y$, $\gamma = Z'Z$. Ἐννοεῖται ὅτι ἂν δουλεύομε στὸ ἐπίπεδο, ὁ τρίτος ἄξονας δὲν ὑπάρχει.

(α′) *Συντεταγμένες σημείου.* Γιὰ τὸ τυχὸν σημεῖο A, θεωροῦμε τὶς συντεταγμένες του ὡς πρὸς καθένα ἀπὸ τοὺς τρεῖς (ἢ δύο) ἄξονες (βλ.1β′) καὶ τὶς συμβολίζομε, ἀντιστοίχως, X_A, Y_A, Z_A. Ἡ διατεταγμένη τριάδα (X_A, Y_A, Z_A) (ἢ τὸ διαταταγμένο ζεῦγος (X_A, Y_A), στὴν περίπτωση ποὺ βρισκόμαστε στὸ ἐπίπεδο) ἀποτελεῖ τὶς *συντεταγμένες τοῦ* A στὸ συγκεκριμένο σύστημα ἀξόνων α, β, γ.

(β′) *Συντεταγμένες διανύσματος.* Γιὰ τὸ τυχὸν διάνυσμα $\vec{u}$, θεωροῦμε τὶς προβολὲς του σὲ καθέναν ἀπὸ τοὺς τρεῖς (ἢ δύο) ἄξονες (βλ.3) καὶ τὶς συμβολίζομε, ἀντιστοίχως, $X_{\vec{u}}, Y_{\vec{u}}, Z_{\vec{u}}$. Δηλαδή, $X_{\vec{u}} = \mathsf{\pi\rho\beta}_\alpha \vec{u}$ καὶ ἀνάλογα γιὰ τὶς ὑπόλοιπες συντεταγμένες. Συνεπῶς, λόγῳ τοῦ (3α′), ἂν $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$,

$$X_{\vec{u}} = X_B - X_A \ , \ Y_{\vec{u}} = Y_B - Y_A \ , \ Z_{\vec{u}} = Z_B - Z_A \ .$$

Ἡ διατεταγμένη τριάδα $(X_{\vec{u}}, Y_{\vec{u}}, Z_{\vec{u}})$ (ἢ τὸ διατεταγμένο ζεῦγος $(X_{\vec{u}}, Y_{\vec{u}})$, στὴν περίπτωση ποὺ βρισκόμαστε στὸ ἐπίπεδο) ἀποτελεῖ τὶς *συντεταγμένες τοῦ* $\vec{u}$ στὸ συγκεκριμένο σύστημα ἀξόνων α, β, γ. Λόγῳ τοῦ (3α′), *ἴσα διανύσματα ἔχουν ἴσες συντεταγμένες*. Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφο: *Ἂν δύο διανύσματα ἔχουν ἴσες συντεταγμένες, τότε εἶναι ἴσα.* Πράγματι, ἔστω ὅτι τὰ $\vec{u}, \vec{v}$ ἔχουν ἴσες καὶ τὶς τρεῖς (ἢ τὶς δύο, ἂν εἴμαστε στὸ ἐπίπεδο) συντεταγμένες τους. Παίρνομε δύο σημεῖα A καὶ B τέτοια ὥστε $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ καὶ $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Ἐξ ὁρισμοῦ τῶν συντεταγμένων διανύσματος, $X_{\vec{u}} = \mathsf{\pi\rho\beta}_\alpha \overrightarrow{OA} =$ (βλ. 3) $X_A - X_0 = X_A$. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, $X_{\vec{v}} = X_B$. Ἄρα, ἀπὸ τὴν ὑπόθεση $X_{\vec{u}} = X_{\vec{v}}$ ἕπεται $X_A = X_B$. Ἀνάλογα, $Y_A = Y_B$ καὶ $Z_A = Z_B$. Συνεπῶς, τὰ σημεῖα A καὶ B ταυτίζονται, ἄρα $\overrightarrow{OA}$=$\overrightarrow{OB}$ καί, τελικά, $\vec{u} = \vec{v}$. Τελικὸ συμπέρασμα: *Δύο διανύσματα εἶναι ἴσα ἄν, καὶ μόνο ἄν, οἱ συντεταγμένες τους, μία πρὸς μία, εἶναι ἴσες.*

(γ′) Στὸ (4β′) εἴδαμε ὅτι $X_{\vec{u}} = X_A$. Τὸ ἀνάλογο ἰσχύει καὶ γιὰ τὶς ὑπόλοιπες συντεταγμένες. Ἔτσι, καταλήγομε στὸ ἑξῆς χρήσιμο συμπέρασμα: *Οἱ συντεταγμένες ἑνὸς διανύσματος $\vec{u}$ συμπίπτουν μὲ τὶς συντεταγμένες τοῦ πέρατος ἐκείνου τοῦ διανύσματος, ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\vec{u}$ καὶ ἔχει ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.*