Αναλυτικη Γεωμετρια-Μιγαδικοι Αριθμοι

Ἐξετάσεις Ἰανουαρίου 2003

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

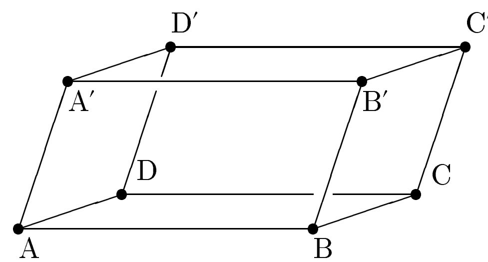
20 Ἰανουαρίου 2003

$\mu, \delta, \epsilon, \chi$ συμβολίζουν, ἀντίστοιχα,
τα ψηφία τῶν μονάδων, δεκάδων ἑκατοντάδων καὶ χιλιάδων
τοῦ ἀριθμοῦ μητρώου σας.

Σὲ ὅλα τὰ θέματα, πρῶτα θὰ κάνετε τὶς ἀριθμητικὲς ἀντικαταστάσεις στὰ $\mu, \delta, \epsilon, \chi$ καὶ μετὰ τοὺς ὁποιουσδήποτε ὑπολογισμούς!

Αναλυτικη Γεωμετρια

μονάδες



1. Στὸ παρακάτω σχῆμα παριστάνεται ἕνα παραλληλεπίπεδο, στὸ ὁποῖο $A(\mu-6, \chi+5, \delta+9)$, $B(\delta+1, \mu-8, -3\delta)$ $A'(-\mu+5, \delta, -\chi-4)$, $D(\mu-6, \delta, \chi+4)$.

   (α′) Ὑπολογῖστε τὶς συντεταγμένες τῶν ὑπολοίπων κορυφῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου. 1

   (β′) Ἐξετᾶστε ἂν τὸ παραλληλόγραμμο $ABCD$ εἶναι ὀρθογώνιο. 1

   (γ′) Βρεῖτε τὴν ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου βρίσκεται τὸ $ABCD$. 1

   (δ′) Ὑπολογῖστε τὴν ἀπόσταση τοῦ B' ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο τοῦ $ABCD$. 1

   (ε′) Ὑπολογῖστε τὴν ἀπόσταση τοῦ B' ἀπὸ τὴν εὐθεία AD. 1

   (ϛ′) Ὑπολογῖστε τὴν ἀπόσταση τῆς εὐθείας $A'B'$ ἀπὸ τὴν εὐθεία AD. 1

   (ζ′) Ὑπολογῖστε τὸν ὄγκο τοῦ παραλληλεπιπέδου. 1

   (η′) Ἔστω E τὸ μέσο τοῦ AB. Φέρνομε την $D'E$ καὶ στὴν προέκτασή της, πρὸς τὸ μέρος τοῦ E, παίρνομε ἕνα σημεῖο Z, ποὺ νὰ ἀπέχει ἀπὸ τὸ E ἀπόσταση ἴση μὲ τὸ 1/5 τῆς ἀπόστασης ED'. Βρεῖτε τὶς συντεταγμένες τοῦ Z. 1

2. Ἔστω ἡ καμπύλη τοῦ ἐπιπέδου, μὲ ἐξίσωση $AX^2+2BXY+CY^2+2DX+2EY+F=0$, ὅπου

$$\begin{aligned} A &= -4\mu^2+48\mu-8\delta^2+20\delta-24 \quad , \quad B=60 \\ C &= -143+48\mu-4\mu^2-8\delta^2+20\delta \quad , \quad D=-4\mu^2+20\delta-8\delta^2+48\mu-84 \\ E &= -48\mu-20\delta+203+4\mu^2+8\delta^2 \quad , \quad F=12\mu^2-144\mu+24\delta^2-288-60\delta\,. \end{aligned}$$

   (α′) Διαπιστῶστε ὅτι τὸ σύστημα, ποὺ ὁδηγεῖ στὴν εὕρεση τοῦ κέντρου συμμετρίας, ἔχει λύση τὴν $(-1,1)$. 1

   (β′) Ποιὸ μετασχηματισμὸ πρέπει νὰ κάνομε στοὺς ἄξονες, προκειμένου νὰ ὁδηγηθοῦμε σὲ ἕνα νέο σύστημα ἀξόνων $x'x, y'y$, στὸ ὁποῖο ἡ καμπύλη θὰ ἔχει κανονικὴ μορφή; (Γιὰ νὰ διευκολυνθεῖτε στὶς πράξεις σᾶς λέω ὅτι θὰ χρειασθεῖτε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα κάποιου ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι τέλεια τετράγωνα: $12769=113^2$, $18769=137^2$, $28561=169^2$, $37249=193^2$, $45369=213^2$). 2

   (γ′) Γράψτε τὶς ἐξισώσεις, ποὺ ἐκφράζουν τὶς συντεταγμένες (X,Y) συναρτήσει τῶν συντεταγμένων (x,y), καθὼς καὶ τὶς ἐξισώσεις, ποὺ ἐκφράζουν τὶς συντεταγμένες (x,y) συναρτήσει τῶν συντεταγμένων (X,Y). 1

(δ′) Διαπιστῶστε ὅτι τὸ σημεῖο P μὲ συντεταγμένες $(1, 2)$ ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸ σύστημα, ἀνήκει στην καμπύλη καὶ γράψτε τὴν ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης στὸ P ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸ σύστημα συντεταγμένων. 1

(ε′) Ποιὲς εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ P (βλ. προηγούμενη ἐρώτηση) ὡς πρὸς τὸ νέο σύστημα συντεταγμένων; Περιγράψτε πῶς, στηριζόμενοι στὶς ἐρωτήσεις γ′ καὶ δ′, θὰ μπορούσατε νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης στὸ P *ὡς πρὸς τὸ νέο σύστημα συντεταγμένων.* 1

Μιγαδικοι Αριθμοι

1. Ἔστω $n = \mu+\chi+4$, ζ μία ἀρχικὴ n-οστὴ ρίζα τῆς μονάδος καὶ $z_1 = \frac{(\delta+2)^2-(\epsilon+1)^2+2(\delta+2)(\epsilon+1)i}{(\delta+2)^2+(\epsilon+1)^2}$. Δουλεύομε στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο.

   (α′) Τί σημαίνει ὅτι ἡ ζ εἶναι *ἀρχική* ; 1

   (β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ z_1 ἀνήκει στὸν μοναδιαῖο κύκλο κέντρου 0. 1

   (γ′) Θεωρῆστε τὸ κανονικὸ n-γωνο, ποὺ εἶναι ἐγγεγραμμένο στὸν μοναδιαῖο κύκλο κέντρου 0 καὶ μία κορυφή του εἶναι ἡ z_1. Ἔστω ὅτι οἱ ὑπόλοιπες κορυφὲς, διαδοχικὰ καὶ μὲ κατεύθυνση ἀντίστροφη τῆς φορᾶς τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου εἶναι $z_2, z_3, \ldots, z_n$. Ὑπολογῖστε τὸν μιγαδικὸ ἀριθμὸ $w = z_2^{37} z_{n-1}^6$ ὡς παράσταση των z_1 και ζ μόνο, καὶ μὲ ὅσο τὸ δυνατὸν μικρότερους ἐκθέτες! 2

   (δ′) Ἂν θ εἶναι τὸ ὄρισμα τοῦ z_1 (δὲν σᾶς ζητῶ νὰ τὸ ὑπολογίσετε!), ὑπολογῖστε τὸ ὄρισμα τοῦ $\overline{w}$ (ἡ μόνη παράμετρος, ποὺ θὰ ἐμφανισθεῖ στὸν ὑπολογισμό σας θὰ εἶναι ἡ θ). 2

2. Ἔστω $w_1 = \epsilon + 1 + \mu i$ καὶ $w_2 = \delta + (\chi + 1)i$. Περιγράψτε, ὅσο ἀκριβέστερα μπορεῖτε, τὶ σχήματα παριστάνουν στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο τὰ σύνολα 2

$$A = \{z \,:\, |z - w_1| < |z - w_2|\} \text{ καὶ } \quad B = \{z \,:\, |z - w_1| + (-1)^\epsilon |z - w_2| = \pm 1\}\ .$$

3. Διαλέξτε **ἕνα μόνο** ἀπὸ τὰ δύο ἐρωτήματα: 2

   (α′) Ἔστω $n = \mu + 3$, $m = \delta + 5$ καὶ $k = \epsilon + 4$. Ἔστω ζ_1 μία ἀρχικὴ n-οστὴ ρίζα τῆς μονάδος καὶ ζ_2 μία ἀρχική m-οστὴ ρίζα τῆς μονάδος. Ὑπολογίστε ὅλες τὶς k-οστές ρίζες τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\zeta_1^5 \zeta_2^3$.

   (β′) (Ἀπαιτεῖ χρήση ὑπολογιστῆ τσέπης). Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ πέμπτες ρίζες τοῦ $(\epsilon+1)^2 - (\delta+1)^2 + 2(\epsilon+1)(\delta+1)i$ ὡς μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $x + yi$ μὲ τοὺς x, y πραγματικοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ὑπολογισμένους κατὰ προσέγγιση.

Βαθμολογία: Ἔστω α τὸ σύνολο τῶν μονάδων, ποὺ θὰ συγκεντρώσετε ἀπὸ τὰ θέματα Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας καὶ μ τὸ σύνολο τῶν μονάδων, ποὺ θὰ συγκεντρώσετε ἀπὸ τὰ θέματα Μιγαδικῶν Ἀριθμῶν. Τότε,

$$\text{Βαθμὸς τῆς ἐξέτασης} = \begin{cases} \min(4, \frac{\alpha+\mu}{2}) & \text{ἂν } \alpha < 5 \text{ εἴτε } \mu < 3. \\ \frac{\alpha+\mu}{2} & \text{ἂν } \alpha \geq 5 \text{ καὶ } \mu \geq 3. \end{cases}$$

Ὑπενθυμίζεται **στοὺς πρωτοετεῖς τοῦ Τμήματος Μαθηματικῶν, μόνο**, ὅτι ὁ βαθμὸς αὐτὸς συμψηφίζεται μὲ τὸν βαθμὸ τῶν Ἐργαστηρίων, καθὼς καὶ τῶν ἑβδομαδιαίων συναντήσεων.