

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ-ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Έξετάσεις Σεπτεμβρίου 2003

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

5 Σεπτεμβρίου 2003

$\mu, \delta, \epsilon, \chi$ συμβολίζουν, αντίστοιχα, τα ψηφία τών μονάδων, δεκάδων εκατοντάδων και χιλιάδων του αριθμού μητρώου σας.
Σε όλα τα θέματα, πρώτα θα κάνετε τις αριθμητικές αντικαταστάσεις στα $\mu, \delta, \epsilon, \chi$ και μετά τούς όποιουσδήποτε υπολογισμούς!

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

μονάδες

1. Θεωρήστε τα σημεία $A = (\mu + 1, \delta + 1, \epsilon)$, $B = (\chi, \delta + 1, \epsilon + 2)$, $C = (\delta + 4, \chi - 2, \mu + 11)$.
 - (α') Αποδείξτε ότι τα A, B, C δεν είναι συνευθειακά. 0,5
 - (β') Υπολογίστε τις συντεταγμένες ενός σημείου D έξω από το επίπεδο του τριγώνου ABC , έτσι ώστε η ευθεία AD να είναι κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου ABC (Άπειρα τέτοια D υπάρχουν· έσείς διαλέξτε ένα). 0,5
 - (γ') Ποιά είναι η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου, πάνω στο οποίο βρίσκεται το τρίγωνο ABD ; 0,5
 - (δ') Ποιά είναι η εξίσωση $aX + bY + cZ + d = 0$ του επιπέδου, πάνω στο οποίο βρίσκεται το τρίγωνο ABD ; 0,5
 - (ε') Υπολογίστε την απόσταση του C από το επίπεδο του ABD . 0,5
 - (ς') Υπολογίστε την απόσταση του C από την ευθεία BD . 0,5
 - (ζ') Υπολογίστε την απόσταση της ευθείας AD από την ευθεία BC . 0,5
 - (η') Υπολογίστε τον όγκο του παραλληλεπίπεδου, που κατασκευάζεται με βάση τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$. 0,5
2. Έστω η καμπύλη Γ του επιπέδου, με εξίσωση $AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0$, όπου

$$A = (\chi + \epsilon)^2 - (\delta + 1)^2, \quad B = 2(\chi + \epsilon)(\delta + 1), \quad C = \frac{B^2}{A}$$

$$D = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad E = -\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad F = -\frac{A + 2B}{A^2 + B^2}.$$

(Προσοχή! Η τετραγωνική ρίζα βγαίνει ακριβώς. Μή προχωρήσετε σε πράξεις αν δεν βρείτε ακέραιο $\sqrt{A^2 + B^2}$.) Θέλομε να φέρομε την εξίσωση της καμπύλης σε γνώριμη μορφή (κανονική).

- (α') Αν σας δοθεί έξ αρχής ή πληροφορία ότι η καμπύλη αυτή δεν αποτελείται από δύο ευθείες, απαντήστε δίχως να κάνετε πράξεις τι καμπύλη είναι η Γ . 0,5

(β') Ποιοί είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας θ , κατά την οποία πρέπει να στραφούν οι άξονες $X'X, Y'Y$, ως πρώτο βήμα για να επιτύχουμε τον σκοπό μας; Γράψτε τις εξισώσεις, που εκφράζουν τις συντεταγμένες (X, Y) συναρτήσει των νέων συντεταγμένων (x', y') , μετά τη στροφή, και αντίστροφα, τις εξισώσεις, που εκφράζουν τις νέες συντεταγμένες (x', y') συναρτήσει των συντεταγμένων (X, Y) . 0,5

(γ') Μετά τη στροφή, ποιά άπλη μορφή παίρνει η εξίσωση της Γ ; Οι πράξεις θα γίνουν άπλούστατα, αν αποδείξετε πρώτα ότι $AX^2 + 2BXY + CY^2 = \frac{(AX+BY)^2}{A}$. Μπορείτε, κάνοντας κατάλληλη (πολύ άπλη) αλλαγή των συντεταγμένων (x', y') σε νέες (x, y) , να άπλοποιήσετε ακόμη περισσότερο την εξίσωση της Γ ; 1

(δ') Διαπιστώστε ότι το σημείο P με συντεταγμένες $(\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, 0)$ ως προς το άρχικό σύστημα, ανήκει στην καμπύλη και γράψτε την εξίσωση της έφαπτομένης της καμπύλης στο P ως προς το άρχικό σύστημα συντεταγμένων. 0,5

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. (Υπενθυμίζεται ότι μία n -οστή ρίζα της μονάδας ζ λέγεται *άρχικη* αν κάθε n -οστή ρίζα της μονάδας μπορεί να εκφρασθεί ως δύναμη της ζ .)
Έστω $n = 3(\chi + \epsilon + \delta + \mu)$. Δώστε (με αίτιολογία) ένα παράδειγμα n -οστής ρίζας της μονάδας, διαφορετικής των ± 1 , που να μην είναι άρχικη. Γράψτε όλες τις άρχικές n -οστές ρίζες της μονάδας. 1

2. Έστω $n = \chi + \epsilon + 1$ και z_1 μία άρχικη n -οστή ρίζα της μονάδας. Έστω $m = \delta + \mu + 2$ και z_2 μία άρχικη m -οστή ρίζα της μονάδας.
(α') Γράψτε όλες τις έκτες ρίζες του μιγαδικού αριθμού $w = z_1^{-3} z_2^5$. 0,5

(β') Αποδείξτε (άπλούστατα) ότι η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο κέντρου 0. Άς φαντασθούμε ένα κανονικό έξάγωνο έγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο, του οποίου μία κορυφή είναι ή w του έρωτήματος (α'). Ποιά είναι ή μεθεπόμενη της w κορυφή; 0,5

3. Έστω $w_1 = \epsilon + 1 + \mu i$ και $w_2 = \delta + (\chi + 1)i$. Περιγράψτε, όσο άκριβέστερα μπορείτε, τι σχήματα παριστάνουν στο μιγαδικό επίπεδο τά σύνολα

$$A = \{z : 2\epsilon + 1 < |z - w_1| < 2\epsilon + 4\} \text{ και } B = \{z : \Re(z - w_2) > -2\}$$

(\Re σημαίνει «πραγματικό μέρος»). 1

4. (Απαιτεί χρήση υπολογιστή τσέπης.) Νά υπολογισθούν οι πέμπτες ρίζες του $\chi + \epsilon + 1 + (\mu + 1)i$ ως μιγαδικοί αριθμοί $x + yi$ με τους x, y πραγματικούς δεκαδικούς αριθμούς, υπολογισμένους κατά προσέγγιση. 1

Βαθμολογία: Σύνολο μονάδων: 10,5. Βάση: 5. Για να περάσετε το μάθημα, είναι άπαραίτητο, έπίσης, να συγκεντρώσετε βαθμολογία, τουλάχιστον 3 στα θέματα της Άναλυτικής Γεωμετρίας, και τουλάχιστον 2 στα θέματα των Μιγαδικών Αριθμών.