

ϛ' Εργασία

Παραδοτέα στη συνάντηση της εβδομάδας 25/11-29/11.

1. Δίνονται τα σημεία $A(1, 0, -2)$, $B(2, 1, -1)$, $\Gamma(-1, 1, 3)$ και $P(2, 2, -1)$. Υπολογίστε τα εξής:

- (α') Την εξίσωση του επιπέδου Π , το οποίο διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ .
- (β') Τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας ϵ , η οποία διέρχεται από το σημείο P και είναι κάθετη στο επίπεδο Π .
- (γ') Την αναλυτική (μη διανυσματική) έκφραση της ευθείας ϵ .
- (δ') Την απόσταση του P από το Π .
- (ε') Τις συντεταγμένες του P' , το οποίο κατασκευάζεται ως εξής: Έστω ότι η ευθεία ϵ τέμνει το επίπεδο Π στο T . Την προεκτείνουμε προς το μέρος του T και παίρνουμε σημείο P' , έτσι ώστε $TP' = 2TP$.

2. Επί των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma A$ τριγώνου $AB\Gamma$ (ή των προεκτάσεών τους) παίρνουμε, αντιστοίχως, σημεία Γ', A', B' , έτσι ώστε

$$\frac{(\Gamma'A)}{(\Gamma'B)} \cdot \frac{(A'B)}{(A'\Gamma)} \cdot \frac{(B'\Gamma)}{(B'A)} = 1$$

Αποδείξτε τα εξής:

- (α') Αν δύο από τα σημεία A', B', Γ' βρίσκονται στο εσωτερικό των αντιστοίχων πλευρών, τότε το τρίτο, υποχρεωτικά, βρίσκεται στην προέκταση της αντίστοιχης πλευράς.
- (β') Αν δύο από τα σημεία A', B', Γ' βρίσκονται στις προεκτάσεις των αντιστοίχων πλευρών, τότε και το τρίτο, υποχρεωτικά, βρίσκεται στην προέκταση της αντίστοιχης πλευράς.
- (γ') Τα σημεία A', B', Γ' είναι συνευθειακά. (Αυτή η πρόταση είναι το λεγόμενο «Αντίστροφο του Θεωρήματος του Μενελάου»).

[Υπόδειξη: Προσοχή! Οι παρενθέσεις στα ευθύγραμμα τμήματα υποδηλώνουν προσανατολισμένα μήκη. Συμβολίστε τους απλούς λόγους $(AB\Gamma')$, $(B\Gamma A')$, $(\Gamma AB')$ με λ, μ, ν , αντιστοίχως, και αποδείξτε ότι $\lambda\mu\nu = -1$. Εκφράστε τις συντεταγμένες των A', B', Γ' συναρτήσει των συντεταγμένων των A, B, Γ και των λ, μ, ν . Τέλος, θυμηθείτε την «οριζουσιακή» συνθήκη για να είναι τρία σημεία συνευθειακά.]