# ϛ′ Φυλλάδιο Ἀσκήσεων Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας-Μιγαδικῶν Ἀριθμῶν

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

1. Κάνοντας χρήση ὑπολογιστῆ τσέπης ὑπολογῖστε μὲ ἀκρίβεια 5 δεκαδικῶν ψηφίων ὅλες τὶς λύσεις τῆς ἐξίσωσης $z^n = a$ σὲ κάθε μίας ἀπὸ τὶς παρακάτω περιπτώσεις, ἀφοῦ πρῶτα γράψετε τὸ $a$ μὲ τριγωνομετρικὴ μορφὴ $\rho(\text{συν}\,\theta + i\,\text{ημ}\,\theta)$ (τὸ ὅρισμα $\theta$ σὲ ἀκτίνια):
   (α′) $n = 3, a = 3 - 4i$, (β′) $n = 5, a = 5 + 12i$, (γ′) $n = 4, a = (-5 + 12i)^{-1}$

   Ἀπαντήσεις: (α′) $\rho = 5, \theta \approx -0.927295$, $z \approx -1.26495 - 1.15061i$, $-0.36398 + 1.67078i$, $1.62893 - 0.52017i$.
   (β′) $\rho = 13$, $\theta \approx 1.17601$, $z \approx -1.54287 + 0.63983i$, $-1.08529 - 1.26964i$, $0.13175 + 1.66507i$, $0.87212 - 1.42451i$, $1.62429 + 0.38924i$.
   (γ′) $\rho = \frac{1}{13}$, $\theta \approx -1.96559$, $z \approx -0.46433 + 0.24850i$, $-0.24850 - 0.46433i$, $0.24850 + 0.46433i$, $0.46433 - 0.24850i$.

2. Γρᾶψτε τὶς ὄγδοες ρίζες τῆς μονάδας μὲ τριγωνομετρικὴ μορφή, ὅπου τὸ ὅρισμα θὰ εἶναι ἐκφρασμένο σὲ μοῖρες, καὶ παραστῆστε τις γεωμετρικά. Ἀνάλογο ζήτημα καὶ γιὰ τὶς ἔννατες ρίζες τῆς μονάδας.

3. Χρησιμοποιώντας τὸν συμβολισμὸ $z_k = \text{συν}\,\dfrac{2k\pi}{n} + i\,\text{ημ}\,\dfrac{2k\pi}{n}$, ὅπου $k \in \mathbb{Z}$, γιὰ τὶς $n$-οστὲς ρίζες τῆς μονάδας ($n > 1$ ἀκέραιος), ὑπολογῖστε ὅσο γίνεται πιὸ ἁπλά, μὲ ποιὰ $n$-οστὴ ρίζα $z_k$, $0 \le k \le n-1$ ἰσοῦται ἡ παράσταση $w$ στὶς περιπτώσεις: (α′) $n = 5$, $w = z_3^2 z_4^4 z_2^{-3}$ καὶ (β′) $n = 6$, $w = z_3^3 z_4^5 z_2^4 z_5^{-3}$.

4. Μὲ τὸν συμβολισμὸ τῆς προηγούμενης ἄσκησης, δεῖξτε ὅτι, ὅταν $n = 7$, οἱ δυνάμεις ἑνὸς ὁποιουδήποτε $z_\nu$ παράγουν ὅλα τὰ ὑπόλοιπα $z_k$. Ὅμως, γιὰ $n = 10$ δῶστε παράδειγμα ἑνὸς συγκεκριμένου $z_\nu$, τοῦ ὁποίου οἱ δυνάμεις δὲν παράγουν ὅλα τὰ $z_k$.

5. Ἔστω $z = \text{συν}\,\theta + i\,\text{ημ}\,\theta$ καὶ $w = \text{συν}\,\phi + i\,\text{ημ}\,\phi$. Ὑπολογῖστε συναρτήσει τῶν $z$ καὶ $w$ τὴν παράσταση

$$\frac{(\text{συν}(2\theta+\phi) + i\,\text{ημ}(2\theta+\phi))^5(\text{συν}(3\theta) - i\,\text{ημ}(3\theta))(\text{συν}(5\phi) + i\,\text{ημ}(5\phi))}{(\text{συν}(4\phi+\theta) + i\,\text{ημ}(4\phi+\theta))(\text{συν}(3\phi) + i\,\text{ημ}(3\phi))(\text{συν}(\theta-2\phi) - i\,\text{ημ}(\theta-2\phi))}\,.$$

   Ἀπάντηση: $z^7 w$.

6. Ἔστω

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \text{συν}(\theta + k\phi)\ ,\quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \text{ημ}(\theta + k\phi)\ .$$

Θέτοντας $z = \text{συν}\,\theta + i\,\text{ημ}\,\theta$ καὶ $w = \text{συν}\,\phi + i\,\text{ημ}\,\phi$ καὶ χρησιμοποιώντας τὸν τύπο τοῦ de Moivre, ἀποδεῖξτε πρῶτα ὅτι $S_1 + iS_2 = z\dfrac{w^n - 1}{w - 1}$ καὶ μετὰ τὶς ταυτότητες

$$S_1 = \frac{\text{ημ}(\frac{n\phi}{2})}{\text{ημ}(\frac{\phi}{2})}\,\text{συν}(\theta + \frac{(n-1)\phi}{2})\ \ ,\quad S_2 = \frac{\text{ημ}(\frac{n\phi}{2})}{\text{ημ}(\frac{\phi}{2})}\,\text{ημ}(\theta + \frac{(n-1)\phi}{2})\ .$$

Ὑπόδειξη: Νὰ κάνετε χρήση τῆς ταυτότητας $1 + x + x^2 + \cdots x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$.

7. Περιγρᾶψτε γεωμετρικὰ τὰ παρακάτω σύνολα. Στὶς περιπτώσεις πού, κατὰ τὴ γνώμη σας, εἶναι ἁπλούστερη ἡ περιγραφὴ μὲ σχέδιο παρὰ μὲ λόγια, σχεδιάστε τὸ σύνολο. (Οἱ συμβολισμοὶ $\Re(z)$ καὶ $\Im(z)$ σημαίνουν τὸ πραγματικὸ καὶ τὸ φανταστικὸ μέρος τοῦ $z$, ἀντιστοίχως.)

$$\begin{aligned}
A &= \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{2z + 4 - 6i}{z - 3}\right| = 2\} \\
B &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 3 + 5i| = 3\} \\
C &= \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z + 2}{z - 3 + 2i}\right| > 1\} \\
D &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \leq 3\} \\
E &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 + i| > 3\} \\
F &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| + |z - 2 - i| = 5\} \\
G &= \{z \in \mathbb{C} : 2\Re(z) + 3\Im(z) = 5\} \\
H &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 3 + i| - |z - 2 + i| = 5\} \\
I &= \{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re(z) < 3\} \cap \{z \in \mathbb{C} : -2 < \Im(z) < 2\}\ .
\end{aligned}$$