

Γ' Φυλλάδιο Άσκήσεων Αναλυτικής Γεωμετρίας-Μιγαδικών Αριθμών

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

1. Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε σημεία A, B, C, P ισχύει

$$\vec{AB} \cdot \vec{PC} + \vec{BC} \cdot \vec{PA} + \vec{CA} \cdot \vec{PB} = 0.$$

Εφαρμόστε τη σχέση αυτή στην περίπτωση που A, B, C είναι κορυφές τριγώνου και P είναι το σημείο τομής δύο ύψων του, για να αποδείξετε ότι και το τρίτο ύψος διέρχεται από το P .

2. Βρείτε τις αναλυτικές εκφράσεις των εξής ευθειών, που διέρχονται από τα σημεία A, B , στις εξής περιπτώσεις:

(α') $A = (-1, 2), B = (4, 3)$

(β') $A = (-1, 2), B = (4, 2)$

(γ') $A = (-1, 2, 3), B = (4, 3, 1)$

(δ') $A = (-1, 2, 4), B = (1, 2, 5)$

(ε') $A = (1, 3, -2), B = (1, 5, -2)$.

3. Η αναλυτική έκφραση μιας ευθείας του χώρου δίνεται από το ζεύγος των εξισώσεων $3x - 2y = 11, y - 3z = 14$. Υπολογίστε ένα διάνυσμα, που να έχει την ίδια διεύθυνση με την ευθεία, και γράψτε, στη συνέχεια, την αναλυτική έκφραση της ευθείας υπό τη συνήθη μορφή $(x - x_0)/u_1 = (y - y_0)/u_2 = (z - z_0)/u_3$. Ανάλογο ζήτημα αν το ζεύγος των εξισώσεων είναι $3x - 2y = 11, y = 14$.

Η παρακάτω άσκηση είναι εξαιρετικά σημαντική!

4. Στο επίπεδο των αξόνων OX, OY (όρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων), έστω ϵ η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(-2, 0), (0, -1)$ και E το σημείο με συντεταγμένες $(4, 1)$.

(α') Βρείτε ποιά εξίσωση ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων (X, Y) , τα οποία ισαπέχουν από την ευθεία ϵ και το σημείο E .

(β') Βρείτε τὸ ἥμιτόνο καὶ τὸ συνημίτονο τῆς προσανατολισμένης γωνίας θ , τὴν ὁποία σχηματίζει ὁ θετικὸς ἡμιάξονας OX μὲ τὴν εὐθεία ϵ .

(γ') Βρείτε τὶς συντεταγμένες τῆς προβολῆς T τοῦ E πάνω στὴν ϵ .

(δ') Θεωρήστε νέο ὀρθοκανονικὸ σύστημα μὲ ἀρχὴ τὸ μέσο A τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ET καὶ ἕναν ἀπὸ τοὺς ἄξονες (τὸν Ax) παράλληλο πρὸς τὴν εὐθεία ϵ . Ἄν ἕνα σημεῖο ἔχει συντεταγμένες (X, Y) ὡς πρὸς τὸ παλιὸ σύστημα καὶ (x, y) ὡς πρὸς τὸ νέο, ἐκφράστε τὰ x, y συναρτήσει τῶν X, Y καὶ ἀντιστρόφως.

(ε') Ποιὰ μορφή θὰ πάρει ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐρωτήματος (α') στὸ νέο σύστημα ἄξόνων;

Ἀπαντήσεις. (α') $4X^2 + Y^2 - 4XY - 44X - 18Y + 81 = 0$. (β') $\sin \theta = 2/\sqrt{5}$, $\eta\mu \theta = -1/\sqrt{5}$. (γ') $(12/5, -11/5)$. (ε') $y = \frac{\sqrt{5}}{16}x^2$.