

## Γ' Φυλλάδιο Άσκήσεων Αναλυτικής Γεωμετρίας-Μιγαδικών Αριθμών

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

1. Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε σημεία  $A, B, C, P$  ισχύει

$$\vec{AB} \cdot \vec{PC} + \vec{BC} \cdot \vec{PA} + \vec{CA} \cdot \vec{PB} = 0.$$

Εφαρμόστε τη σχέση αυτή στην περίπτωση που  $A, B, C$  είναι κορυφές τριγώνου και  $P$  είναι το σημείο τομής δύο ύψων του, για να αποδείξετε ότι και το τρίτο ύψος διέρχεται από το  $P$ .

2. Βρείτε τις αναλυτικές εκφράσεις των εξής ευθειών, που διέρχονται από τα σημεία  $A, B$ , στις εξής περιπτώσεις:

(α')  $A = (-1, 2), B = (4, 3)$

(β')  $A = (-1, 2), B = (4, 2)$

(γ')  $A = (-1, 2, 3), B = (4, 3, 1)$

(δ')  $A = (-1, 2, 4), B = (1, 2, 5)$

(ε')  $A = (1, 3, -2), B = (1, 5, -2)$ .

3. Η αναλυτική έκφραση μιας ευθείας του χώρου δίνεται από το ζεύγος των εξισώσεων  $3x - 2y = 11, y - 3z = 14$ . Υπολογίστε ένα διάνυσμα, που να έχει την ίδια διεύθυνση με την ευθεία, και γράψτε, στη συνέχεια, την αναλυτική έκφραση της ευθείας υπό τη συνήθη μορφή  $(x - x_0)/u_1 = (y - y_0)/u_2 = (z - z_0)/u_3$ . Ανάλογο ζήτημα αν το ζεύγος των εξισώσεων είναι  $3x - 2y = 11, y = 14$ .

**Η παρακάτω άσκηση είναι εξαιρετικά σημαντική!**

4. Στο επίπεδο των άξόνων  $OX, OY$  (όρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων), έστω  $\epsilon$  η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $(-2, 0), (0, -1)$  και  $E$  το σημείο με συντεταγμένες  $(4, 1)$ .  
(α') Βρείτε ποια εξίσωση ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων  $(X, Y)$ , τα οποία ισαπέχουν από την ευθεία  $\epsilon$  και το σημείο  $E$ .

(β') Βρείτε τὸ ἥμιτόνο καὶ τὸ συνημίτονο τῆς προσανατολισμένης γωνίας  $\theta$ , τὴν ὁποία σχηματίζει ὁ θετικὸς ἡμιάξονας  $OX$  μὲ τὴν εὐθεία  $\epsilon$ .

(γ') Βρείτε τὶς συντεταγμένες τῆς προβολῆς  $T$  τοῦ  $E$  πάνω στὴν  $\epsilon$ .

(δ') Θεωρήστε νέο ὀρθοκανονικὸ σύστημα μὲ ἀρχὴ τὸ μέσο  $A$  τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος  $ET$  καὶ ἕναν ἀπὸ τοὺς ἄξονες (τὸν  $Ax$ ) παράλληλο πρὸς τὴν εὐθεία  $\epsilon$ . Ἄν ἕνα σημεῖο ἔχει συντεταγμένες  $(X, Y)$  ὡς πρὸς τὸ παλιὸ σύστημα καὶ  $(x, y)$  ὡς πρὸς τὸ νέο, ἐκφράστε τὰ  $x, y$  συναρτήσει τῶν  $X, Y$  καὶ ἀντιστρόφως.

(ε') Ποιὰ μορφή θὰ πάρει ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐρωτήματος (α') στὸ νέο σύστημα ἄξόνων;

Ἀπαντήσεις. (α')  $4X^2 + Y^2 - 4XY - 44X - 18Y + 81 = 0$ . (β')  $\sin \theta = 2/\sqrt{5}$ ,  $\eta\mu \theta = -1/\sqrt{5}$ . (γ')  $(12/5, -11/5)$ . (ε')  $y = \frac{\sqrt{5}}{16}x^2$ .