Β΄ Φυλλάδιο Ἀσκήσεων Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας-Μιγαδικῶν Ἀριθμῶν

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

1. Ἐξετᾶστε ἂν τὰ διανύσματα $\vec{u} = (-1, 2)$, $\vec{v} = (3, 4)$ ἀποτελοῦν βάση γιὰ τὰ διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου. Ἀνάλογο ζήτημα γιὰ τὰ διανύσματα $\vec{u} = (-4, 2)$, $\vec{v} = (6, -3)$. Στὴν περίπτωση ποὺ ἀποτελοῦν βάση, ἐκφρᾶστε καθένα ἀπὸ τὰ διανύσματα $\vec{x} = (5, 3)$ καὶ $\vec{y} = (-15, -20)$ ὡς γραμμικό συνδυασμό τῶν διανυσμάτων τῆς βάσης.

2. Ἐξετᾶστε ἂν τὰ διανύσματα $\vec{u} = (-4, -2, 5)$, $\vec{v} = (1, 1, -3)$, $\vec{w} = (7, 1, 0)$ ἀποτελοῦν βάση γιὰ τὰ διανύσματα τοῦ χώρου. Ἀνάλογο ζήτημα γιὰ τὰ διανύσματα $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 4, -3)$, $\vec{w} = (0, 2, -1)$. Στὴν περίπτωση ποὺ ἀποτελοῦν βάση, ἐκφρᾶστε καθένα ἀπὸ τὰ διανύσματα $\vec{x} = (5, 3, -2)$, $\vec{y} = (3, 0, -1)$ καὶ $\vec{z} = (-15, -20, 15)$ ὡς γραμμικό συνδυασμό τῶν διανυσμάτων τῆς βάσης.

3. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου (χωρὶς τὴ χρήση συντεταγμένων) ἀποδεῖξτε τὶς ἑξῆς γεωμετρικὲς προτάσεις: (α΄) Οἱ διαγώνιες τοῦ ρόμβου τέμνονται κάθετα. (β΄) Ἔστω τρίγωνο ABC μὲ μήκη πλευρῶν a, b, c. Τότε $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \text{συν}\,\hat{A}$ (ἐπέκταση τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος).

4. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου ἀποδεῖξτε τὴ λεγόμενη ἀνισότητα τῶν Cauchy-Schwarz: Γιὰ ὁποιουσδήποτε πραγματικοὺς ἀριθμοὺς $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ ἰσχύει
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\ .$$

5. Ἀποδεῖξτε ὅτι καθένα ἀπὸ τὰ ζεύγη διανυσμάτων
$$\vec{X} = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})\,,\ \vec{Y} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})\ \ \text{καὶ}\quad \vec{x} = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})\,,\ \vec{Y} = (-\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$$
ἀποτελεῖ ὀρθοκανονικὴ βάση γιὰ τὰ διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου. Βρεῖτε τὸν πίνακα μετάβασης ἀπὸ τὴν πρώτη βάση πρὸς τὴ δεύτερη, καθὼς καὶ τὸν πίνακα

μετάβασης ἀπὸ τὴ δεύτερη πρὸς τὴν πρώτη βάση. Μὲ τὴ βοήθεια τῶν πινάκων αὐτῶν (**ὄχι λύνοντας συστήματα**) ἐκφρᾶστε τὸ διάνυσμα $\vec{u} = 10\vec{X} - 5\vec{Y}$ συναρτήσει τῆς βάσεως $\vec{x}, \vec{y}$, καθὼς καὶ τὸ διάνυσμα $\vec{v} = 13\vec{y}$ συναρτήσει τῆς πρώτης βάσεως.

6. Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὶς τριάδες διανυσμάτων

$$\vec{X} = \frac{1}{7}(3, -2, 6)\,,\ \vec{Y} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1)\,,\ \vec{Z} = \frac{1}{7\sqrt{5}}(2, 15, 4)$$

καὶ

$$\vec{x} = \frac{1}{3}(1, 2, -2)\,,\ \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)\,,\ \vec{z} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4, -1, 1)$$

ἀποτελεῖ ὀρθοκανονικὴ βάση γιὰ τὰ διανύσματα τοῦ χώρου. Βρεῖτε τὸν πίνακα μετάβασης ἀπὸ τὴν πρώτη βάση πρὸς τὴ δεύτερη, καθὼς καὶ τὸν πίνακα μετάβασης ἀπὸ τὴ δεύτερη πρὸς τὴν πρώτη βάση. Μὲ τὴ βοήθεια τῶν πινάκων αὐτῶν (**ὄχι λύνοντας συστήματα**) ἐκφρᾶστε τὸ διάνυσμα $\vec{u} = 3\vec{X} - 3\sqrt{5}\,\vec{Z}$ συναρτήσει τῆς βάσεως $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, καθὼς καὶ τὸ διάνυσμα $\vec{v} = 7\vec{x} - \sqrt{2}\,\vec{y} + 14\sqrt{2}\,\vec{z}$ συναρτήσει τῆς πρώτης βάσεως.