

ΑΛΓΕΒΡΑ
Χειμερινό Έξάμηνο 2015-2016
Καθηγητής Ν. Γ. Τζανάκης

Άσκήσεις τής 5^{ης} εβδομάδας

32. (α') Αποδείξτε ότι η πράξη τής αφαίρεσης στο \mathbb{Z} δεν είναι προσεταιριστική.
(β') Στο σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ τών $n \times n$ πινάκων με στοιχειά πραγματικούς αριθμούς ορίζομε την πράξη $A * B = AB - BA$. Αποδείξτε ότι η πράξη αυτή δεν είναι προσεταιριστική.
33. (α') Έστω d άκεραίος, όχι τετράγωνο άκεραίου και $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a+b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Αποδείξτε ότι, το $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, έφοδιασμένο με τις συνήθειες πράξεις $+$ και \cdot του \mathbb{C} , είναι άκεραία περιοχή.
(β') Για $d = -1$, ο δακτύλιος είναι ο λεγόμενος “δακτύλιος τών άκεραίων του Gauss”, δηλαδή, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Υπολογίστε τὰ αντίστροφημα στοιχειά αυτού του δακτυλίου.
34. Στο μάθημα είδαμε ότι το σύνολο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, έφοδιασμένο με τις συνήθειες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού συναρτήσεων, είναι μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο. Αποδείξτε ότι δεν είναι άκεραία περιοχή.
Υπόδειξη για τὸ τελευταίο έρώτημα. Έστω ή συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ή οποία παίρνει τήν τιμή 1 σε όλους τούς ρητούς και τήν τιμή 0 σε όλους τούς άρρητους. Δείξτε ότι ή h είναι μηδενοδιαρέτης του \mathcal{F} .
35. Έστω δακτύλιος R . Αποδείξτε ότι ή σχέση $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ισχύει για κάθε ζεύγος $a, b \in R$ αν και μόνο αν ο R είναι μεταθετικός. (Όταν, για $x \in R$, γράφομε x^2 , έννοοϋμε $x \cdot x$.)
Ανάλογα, ή σχέση $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ισχύει για κάθε ζεύγος $a, b \in R$ αν και μόνο αν ο R είναι μεταθετικός. (Όταν, για $x \in R$, γράφομε $2x$, έννοοϋμε $x + x$.)
36. Έστω ο δακτύλιος \mathbb{Z}_m ($m > 1$). Αποδείξτε ότι τὸ $[a] \in \mathbb{Z}_m$ είναι μηδενοδιαρέτης αν και μόνο αν $(a, m) > 1$.
37. (α') Νὰ υπολογισθοϋν ὅλοι οί μηδενοδιαρέτες του \mathbb{Z}_{15} και, στη συνέχεια, ὅλα τὰ διατεταγμένα ζεύγη $([a], [b])$ μηδενοδιαρετῶν του \mathbb{Z}_{15} , που έπαληθεϋουν τή σχέση $[a][b] = [0]$.
(β') Στὸν δακτύλιο \mathbb{Z}_{15} νὰ λυθοϋν οί έξισώσεις (χωριστὰ κάθε μία) $([x] - [1])([x] - [6]) = [0]$ και $([x] - [9])([x] - [13]) = [0]$.

Άναφορές

- [1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ' Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.