ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινὸ Ἑξάμηνο 2015-2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $10^{ης}$ ἑβδομάδας

70. Ἔστω σύνολο G ἐφοδιασμένο μὲ μία ἐσωτερικὴ πράξη $*$ μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:
(i) Ἡ $*$ εἶναι προσεταιριστική. (ii) Ὑπάρχει $e \in G$, τέτοιο ὥστε $e * a = a$ γιὰ κάθε $a \in G$.
(iii) Γιὰ κάθε $a \in G$ ὑπάρχει $a' \in G$, τέτοιο ὥστε $a' * a = e$.
Δηλαδή, ἡ πράξη $*$ ἱκανοποιεῖ τὰ ἀξιώματα τῆς ὁμάδας μόνο "ἀπ' τ' ἀριστερὰ". Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ πράξη $*$ ἱκανοποιεῖ τὰ ἀξιώματα τῆς ὁμάδας καὶ "ἀπὸ τὰ δεξιά", ἄρα, $(G, *)$ εἶναι ὁμάδα.

71. Ἔστω πολλαπλασιστικὴ ὁμάδα G, $a \in G$ καὶ $m, n \in \mathbb{Z}$. Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς:
(α′) $a^m a^n = a^{m+n}$.
(β′) $(a^m)^n = a^{mn}$.
(γ′) $a^{-m} = (a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$. Ἄρα τὸ ἀντίστροφο τοῦ a^m εἶναι τὸ a^{-m}.
Διατυπῶστε τὶς παραπάνω σχέσεις στὴν περίπτωση προσθετικῆς ὁμάδας.

72. Ἔστω δύο ὁποιεσδήποτε ὁμάδες $(G_1, \circ)$ καὶ $(G_2, *)$. Ἐφοδιάζομε τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο $G_1 \times G_2$ μὲ τὴν ἑξῆς πράξη $\cdot$: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \circ a_2, b_1 * b_2)$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $(G_1 \times G_2, \cdot)$ εἶναι ὁμάδα.

73. (α′) Ἔστω πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα G, τῆς ὁποίας ἡ περιγραφὴ εἶναι:

$$G = \langle a, b \,|\, a^2 = b^2 = 1,\ ba = ab \rangle.$$

Ἀποδεῖξτε ὅτι $G = \{1, a, b, ab\}$ καὶ συμπληρῶστε τὸν παρακάτω πίνακα πολλαπλασιασμοῦ τῆς G.

$\cdot$	1	a	b	ab
1				
a				
b				
ab				

Διατυπῶστε τὰ παραπάνω στὴν περίπτωση προσθετικῆς ὁμάδας.
(β′) Ἔστω ὁμάδα $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$. Γιὰ ἁπλούστευση τοῦ συμβολισμοῦ, ἀντὶ νὰ συμβολίζομε τὰ στοιχεῖα τῆς $\mathbb{Z}_2$ μὲ $[0], [1]$, θὰ τὰ παριστάνομε, ἁπλῶς, μὲ $0, 1$. Συμπληρῶστε τὸν παρακάτω πίνακα πρόσθεσης τῆς ὁμάδας $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

$+$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$				
$(0,1)$				
$(1,0)$				
$(1,1)$				

Στοὺς παραπάνω δύο πίνακες κάνετε τὰ ἑξῆς: Καὶ στοὺς δύο, συμβολίσετε τὴν πράξη μὲ $*$ καὶ τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο μὲ e (δηλαδή, μὲ τὸ e ἀντικαταστῆστε τὸ 1 στὸν πίνακα τοῦ (α′)

καὶ τὸ $(0,0)$ στὸν πίνακα τοῦ (β′)). Στὸν δεύτερο πίνακα βάλτε ὅπου $(0,1)$ τὸ a καὶ ὅπου $(1,0)$ τὸ b, ὁπότε $(1,1) = a * b$. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ δύο πίνακες, ποὺ θὰ προκύψουν μετὰ τὶς ἀλλαγὲς αὐτές, εἶναι ἴδιοι.

74. Ἔστω $n \geq 3$. Θεωρῆστε τὴ n-οστὴ διεδρικὴ ὁμάδα

$$D_n = \langle a, b \,|\, a^n = b^2 = 1,\ ba = a^{n-1}b \rangle.$$

Ἀποδεῖξτε ἐπαγωγικὰ ὅτι, γιὰ κάθε $k \geq 1$ εἶναι $ba^k = a^{n-k}b = a^{-k}b$. Κάνοντας χρήση αὐτῆς τῆς σχέσης, ἀποδεῖξτε ὅτι $baba^2ba^3ba^4b = a^2b$. Στὴ συνέχεια, δεῖξτε ὅτι κάθε στοιχεῖο $ba^{k_1}ba^{k_2}\cdots ba^{k_r}$ μπορεῖ νὰ γραφτεῖ μὲ τὴ μορφὴ a^ib^j γιὰ κάποιο $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ καὶ $j \in \{0, 1\}$. Βάσει αὐτοῦ δεῖξτε ὅτι

$$D_n = \{1, a, \ldots, a^{n-1}, b, ab, \ldots, a^{n-1}b\}.$$

75. Σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω περιπτώσεις ὁμάδας G καὶ στοιχείου $a \in G$ ὑπολογῖστε τὴν τάξη τοῦ a:
(α′) $G = (\mathbb{Z}_{480}, +)$, $a = [140]$. (β′) $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $a = i$. (γ′) $G = (\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$, $a = 2$.
(δ′) G = πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα τῶν 4×4 ἀντιστρέψιμων πραγματικῶν πινάκων,

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ε′) G ὅπως ἡ ὁμάδα στὸ (δ′), $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ϛ′) G = πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα τῶν 4×4 ἀντιστρέψιμων μιγαδικῶν πινάκων,

$$a = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ζ′) $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $a = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}$.

76. Ἔστω ὁμάδα $(G, \cdot)$ τέτοια ὥστε $a^2 = 1$ γιὰ ὅλα τὰ $a \in G$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ G εἶναι ἀβελιανή.
Ὑπόδειξη. Ἂν $a, b \in G$ πρέπει ν' ἀποδείξετε ὅτι $ab = ba$. Ἐφαρμόστε τὴν ὑπόθεση γιὰ τὸ στοιχεῖο ab.

77. Στὴν ὁμάδα $(U_8, \cdot)$ τῶν ὄγδοων μιγαδικῶν ριζῶν τῆς μονάδος, ἔστω $\zeta = \cos\frac{2\pi}{8} + \sin\frac{2\pi}{8}$. Ποιὰ εἶναι ἡ τάξη τῶν στοιχείων ζ^6 καὶ ζ^5;

78. Ἔστω G κυκλικὴ ὁμάδα τάξεως n. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ πλῆθος τῶν γεννητόρων τῆς G, δηλαδή, τὸ πλῆθος τῶν $g \in G$, ποὺ ἔχουν τὴν ἰδιότητα $\langle g \rangle = G$, εἶναι $\phi(n)$.
Ὑπόδειξη. Χρησιμοποιεῖστε τὸν τύπο, ποὺ δίνει τὴν *τάξη* (g^k) συναρτήσει τῶν *τάξη* (g) καὶ k. Ἂν ὁ g εἶναι γεννήτορας τῆς g, τί τιμὴ πρέπει νὰ ἔχει ὁ k ὥστε νὰ εἶναι καὶ ὁ g^k γεννήτορας;

79. Ὑπολογῖστε ἕνα ἐλάχιστο σύνολο γεννητόρων τῆς ὁμάδας $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ γιὰ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω τιμὲς τοῦ m:[1] $m = 13, m = 15, m = 10, m = 21$.

[1] Στὴν περίπτωση ποὺ ἀρκεῖ ἕνας γεννήτορας, ἡ ὁμάδα εἶναι κυκλική, ἐξ ὁρισμοῦ.

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.